数学：确定性的丧失

Mathematics The Loss of Certainty

第一推动丛书



第二辑

【美】M·克莱因/著
李宏魁/译

湖南科学技术出版社
Hunan Science & Technology Press

Mathematics: The Loss of Certainty

第一推动丛书·第二辑

[美]M·克莱因/著
李宏魁/译

数学：确定性的丧失

湖南科学技术出版社
Hunan science & Technology Press

总　序

科学，特别是自然科学，最重要的目标之一，就是追寻科学本身的原动力，或曰追寻其第一推动。同时，科学的这种追求精神本身，又成为社会发展和人类进步的一种最基本的推动。

科学总是寻求发现和了解客观世界的新现象，研究和掌握新规律，总是在不懈地追求真理。科学是认真的、严谨的、实事求是的，同时，科学又是创造的。科学的最基本态度之一就是疑问，科学的最基本精神之一就是批判。

的确，科学活动，特别是自然科学活动，比较起其他的人类活动来，其最基本的特征就是不断进步。哪怕在其他方面倒退的时候，科学却总是进步着，即使是缓慢而艰难的进步。这表明，自然科学活动中包含着人类的最进步因素。

正是在这个意义上，科学堪称为人类进步的“第一推动”。

科学教育，特别是自然科学的教育，是提高人们素质的重要因素，是现代教育的一个核心。科学教育不仅使人获得生活和工作所需的知识和技能，更重要的是使人获得科学思想、科学精神、科学态度以及科学方法的熏陶和培养，使人获得非生物本能的智慧，获得非与生俱来的灵魂。可以这样说，没有科学的“教育”，只是培养信仰，而不是教育。没有受过科学教育的人，只能称为受过训练，而非受过教育。

正是在这个意义上，科学堪称为使人进化为现代人的“第一推动”。

近百年来，无数仁人智士意识到，强国富民再造中国离不开科学技术，他们为摆脱愚昧与无知作了艰苦卓绝的奋斗，中国的科学先贤们代代相传，不遗余力地为中国的进步献身于科学启蒙运动，以图完成国人的强国梦。然而应该说，这个目标远未达到。今日的中国需要新的科学启蒙，需要现代科学教育。只有全社会的人具备较高的科学素质，以科学的精神和思想、科学的态度和方法作为探讨和解决各类问题的共同基础和出发点，社会才能更好地向前发展和进步。因此，中国的进步离不开科学，是毋庸置疑的。

正是在这个意义上，似乎可以说，科学已被公认是中国进步所必不可少的推动。

然而，这并不意味着，科学的精神也同样地被公认和接受。虽然，科学已渗透到社会的各个领域和层面，科学的价值和地位也更高了。但是，毋庸讳言，在一定的范围

内，或某些特定时候，人们只是承认“科学是有用的”，只停留在对科学所带来的后果的接受和承认，而不是对科学的原动力，科学的精神的接受和承认。此种现象的存在也是不能忽视的。

科学的精神之一，是它自身就是自身的“第一推动”。也就是说，科学活动在原则上是不隶属于服务于神学的，不隶属于服务于儒学的，科学活动在原则上也不隶属于服务于任何哲学。科学是超越宗教差别的，超越民族差别的，超越党派差别的，超越文化的地域差别的，科学是普适的、独立的，它自身就是自身的主宰。

湖南科学技术出版社精选了一批关于科学思想和科学精神的世界名著，请有关学者译成中文出版，其目的就是为了传播科学的精神，科学的思想，特别是自然科学的精神和思想，从而起到倡导科学精神，推动科技发展，对全民进行新的科学启蒙和科学教育的作用，为中国的进步作一点推动。丛书定名为《第一推动》，当然并非说其中每一册都是第一推动，但是可以肯定，蕴含在每一册中的科学的内容、观点、思想和精神，都会使你或多或少地更接近第一推动，或多或少地发现，自身如何成为自身的主宰。

《第一推动》丛书编委会

序　言

人类对于宇宙以及数学地位的认识已被迫作出了根本性的改变，本书要讨论的正是这一点。现在我们知道，数学已不再受到普遍尊重和景仰。数学曾经被认为是精确论证的顶峰，真理的化身，是关于宇宙设计的真理。那么，人类是如何认识到这种观点是错误的，我们现在的观点又是什么，这正是本书的主题。引论中将简要陈述这些主题，部分材料可由详尽的数学史略拾一二。但是，对于普通读者来说，一种直接的、非专业性的探讨更便于接受和理解。

许多数学家可能更愿意把对数学当前地位的揭示控制在数学圈里，公开曝光这些困难也许会出现不好的效果，家丑不可外扬嘛。但是，受理性指导的人们必须充分认识到他们所掌握的工具的力量，认识到推理的能力及

其局限性，这远比盲目相信有益得多，后者很可能导致错误的思想甚至毁灭。

（以下为致谢部分，从略）

M·克莱因
布鲁克林，纽约
1980年1月

引 论

若想预见数学的未来，正确的方法是研究它的历史和现状。

——H．彭加勒

战争、饥荒和瘟疫能引起悲剧，然而，人类思想的局限性也能引起智力悲剧。本书论及的不幸事件降临在人类最为卓著且无与伦比的成就，对人类的理性精神具有最持久和最深刻的影响——数学的头上。

换句话说，这本书在非专业层次上探讨数学尊严的兴衰。看到数学现在的宏大规模，日益增多甚至呈繁荣之势的数学活动，每年发表的数以千计的研究论文，对计算机兴趣的迅猛飞涨，以及尤其是在社会科学和生物科学中对定量关系的广泛研究，数学的衰落何从谈起？悲剧存在于何处？要回答这些问题，我们必须首先考虑是什么为数学赢得了巨大的声望和荣誉。

作为一个独立知识体系的数学起源于古希腊，自它诞生之日

起的两千多年来，数学家们一直在追求真理，而且成就辉煌。关于数和几何图形的庞大理论体系为数学提供了一个看来似乎永无休止的确定性前景。

在数学以外的领域，数学概念及其推论为重大的科学理论提供精髓。尽管通过数学和科学的合作才获得的知识用到了自然定律，但它们看来似乎与绝对的数学真理一样绝对可信，因为天文学、力学、光学、空气动力学中的数学所做的预测与观察和实验相当吻合。因此，数学能牢固把握宇宙的所作所为，能瓦解玄秘并代之以规律和秩序。人类得以趾高气扬地俯瞰他周围的世界，吹嘘自己已经掌握了宇宙的许多秘密（实际上是一系列数学定理）。拉普拉斯的话概括了数学家们一直在不懈地寻求真理的信念。他说，牛顿是最幸运的人，因为只有一个宇宙，而他已发现了它的规律。

数学依赖于一种特殊的方法去达到它惊人而有力的结果，即从不证自明的公理出发进行演绎推理。它的实质是，若公理为真，则可以保证由它演绎出的结论为真。通过应用这些看起来清晰、正确、完美的逻辑，数学家们得出显然是毋庸置疑、无可辩驳的结论。数学的这套方法今天仍然沿用，任何时候，谁想找一个推理的必然性和准确性的例子，一定会想到数学。

这种数学方法所取得的成功吸引了最伟大的智者，数学已显示了人类理性的能力、根源和力量。所以他们猜测，为什么不能把这种方法用到由权威、风俗、习惯控制的领域，比如在哲学、神学、伦理学、美学及社会科学中去寻求真理呢？人类的推理能力，在数学及自然科学中，是如此的卓有成效，肯定也将成为上述其他领域思想和行为的主宰，为其获得真理的美和美的真理。因此，在称作理性时代的启蒙时代，数学方法甚至加上一些数学概念和定理，用到了人文事务中。

洞察力最丰富的来源是后者。19世纪初的创造，包括令人奇怪的几种几何学和代数学，迫使数学家们极不情愿地勉强承认绝对意义上的数学以及科学中的数学真理并不都是真理。例如，他

们发现几种不同的几何学同等地与空间经验相吻合，它们可能都不是真理。显然，自然界的数学设计并不是固有的，或者如果是的话，人类的数学都未必是那个设计的最好诠释。开启真理的钥匙失去了，这一事实是降临到数学头上的第一个不幸事件。

新的几何学和代数学的诞生使数学家们感受到另一个宇宙的震动。寻求真理的信念使数学家们如醉如痴，总是迫不及待地用严密论证去追求那些虚无飘渺的真理。认识到数学并不是真理的化身动摇了他们产生于数学的那份自信，他们开始重新检验他们的创造。他们失望地发现数学中的逻辑形容枯槁，惨不忍睹。

事实上，数学已经不合逻辑地发展。其不仅包括错误的证明，推理的漏洞，还有稍加注意就能避免的疏误。这样的大错比比皆是。这种不合逻辑的发展还涉及对概念的不充分理解，无法真正认识逻辑所需要的原理，以及证明的不够严密；就是说，直觉、实证及借助于几何图形的证明取代了逻辑论证。

不过，数学仍然是一种对宇宙的有效描述，而且在许多人心里，特别是在柏拉图主义者看来，数学自身当然还是一个颇具魅力的知识体系，一个因具真实性而受到青睐的部分。因此，数学家们决定弥补丢失了的逻辑结构，重建有缺陷的部分。在19世纪下半叶，数学的严谨化运动格外引人注目。

到1900年，数学家确信他们已实现了自己的目标。尽管他们不得不满足于数学仅能作为宇宙的一个近似描述的观点，许多人甚至放弃了宇宙的数学化设计这一信念，但他们的确庆幸他们重建了数学的逻辑结构。然而，他们还没来得及炫耀自封的成功，在重建的数学中就发现了矛盾。一般称这些矛盾为悖论，这是避免直接说矛盾而破坏了数学逻辑的委婉用语。

当时那些领头的数学家几乎立刻就投身于解决这些矛盾，结果他们构想、阐述甚至推出了四种不同的数学结构，每一种都有众多的追随者。那些基础的学派不仅努力解决已有的矛盾而且力争避免新的矛盾出现，就是说，建立数学的相容性。在这些基础研究中又出现了其他的问题，某些公理和演绎逻辑推理的可接受

性也成为几个学派采取不同立场的重要原因。

到1930年，数学家已满足于接受几种数学基础的一两个，并且宣称自己的数学证明至少和这些学派的原则相符。但是，灾难再次降临，形式是K. 哥德尔的一篇著名论文。哥德尔证明了那几个学派所接受的逻辑原理无法证明数学的一致性。这还不包括论文里其他一些意义重大、影响深远的结果。哥德尔表明，对已取得的成功提出质疑不能不用到非常可疑的逻辑原理。哥德尔定理引起一场巨变。随后的发展带来了更大的麻烦。例如，就连过去极度推崇的、被认为是精密科学方法的公理化——演绎方法看来也是有缺陷的。这些新的发展给数学增加了多种可能的结构，同时也把数学家分成了更多的相异群体。

数学的当前困境是有许多种数学而不是只有一种，而且由于种种原因每一种都无法使对立学派满意。显然，普遍接受的概念、正确无误的推理体系——1800年时的尊贵数学和那时人的自豪——现在都成了痴心妄想。与未来数学相关的不确定性和可疑，取代了过去的确定性和自满。关于“最确定的”科学的基础意见不一致不仅让人吃惊，而且，温和一点说，是让人尴尬。目前的数学或是故作深沉，或是对广泛承认的真理，所谓完美无缺的逻辑的拙劣模仿。

有的数学家认为，关于接受什么作为真正数学的不同观点，有一天会统一起来。这些人中比较有名的是一群署名为布尔巴基的法国领头数学家：

> 长期以来，对数学原理的重要修正几乎无一不在不确定性时期之后，而不确定性确实使矛盾出现了并且一定得被解决。……至今已有25个世纪之久的这段时期，数学家们一直在改正他们的错误，并且看到了这门科学欣欣向荣，而不是枯竭衰败。这使他们有权力对未来充满希望。

然而，更多的数学家并不乐观。本世纪最伟大的数学家之一，H. 魏尔在1944年说：

> 数学的终极基础和终极意义尚未解决，我们不知道沿着什么方向可以找到最终答案，或者甚至于是否有希望得到一个最终的、客观的答案。“数学化”很可能是人类原始创造力的一项创造性活动，类似于语言或音乐，其历史观点否认完全客观的合理性。

用哥德的话说：一门科学的历史就是这门科学本身。

对于正确的数学是什么所存在的分歧以及不同基础的多样性不仅严重影响数学本身，还波及到最为生机勃勃的自然科学。我们将看到，最先进的自然科学理论（即这种理论的结论可以在感觉上或实体上体现出来。例如假设我们一点也不懂电磁波是什么，但我们却能听到收音机中传出的声音），全都是数学化的。因此，没有亲自对数学基础下过功夫，而又不打算花费数年时间研究不完美的数学的科学家，一定会关心什么样的数学能被理直气壮地应用。

真理的丧失，数学和科学不断增加的复杂性，以及何种方法用于数学是最保险的不确定性，已使大多数数学家放弃科学。风声鹤唳，草木皆兵，数学家们不得不退回到证明方法看起来似乎很安全的数学领域。他们还发现人为编造出来的问题比自然界提出来的问题更富魅力，处理起来更加得心应手。

因完美的数学是什么而产生的危机和矛盾还阻碍了数学的方法在许多其他文化领域中的应用，如哲学、政治科学、伦理学、美学。找到客观、正确的定律和标准的希望变得微弱了，理性时代已经过去。

尽管数学令人不满意，方法复杂多变，对可接受公理持不同意见，还有随时可能出现的新矛盾，都会殃及大部分数学，但是，一些数学家仍然把数学应用于自然现象中，而且事实上把应用领域扩大到经济学、生物学和社会学。数学的继续有效给我们两点启示。第一点是这种有效性可用作判别正确性的准则，当然这个准则是暂时性的。今天认为正确的，也许下次应用时就会证明是

错的。第二点涉及到未知。真正的数学是什么？对此并无定论。为什么数学依旧有效？我们是在用不完美的工具制造奇迹吗？如果人类已经被欺骗了，大自然也会受骗而屈服于人类的数学命令吗？显然不会。而且，正是凭借建立在数学之上的技术，人类成功地登上了月球，探测了火星和木星。这难道不是对宇宙中的数学理论的证实吗？那么，数学的人为因素与变幻莫测又何从谈起呢？当心智和灵魂迷惘不定的时候，躯体能生存下去吗？当然对于人类本身及数学，确实如此。因此我们应该去研究为什么会这样。尽管数学的基础尚不确定，数学家们的理论亦彼此冲突，而数学却已被证明成就辉煌，风采依然。

目　录

引　论……………………………………………………………… 1
第一章　数学真理的起源……………………………………………… 1
第二章　数学真理的繁荣 ……………………………………… 22
第三章　科学的数学化 ………………………………………… 42
第四章　第一场灾难：真理的丧失 …………………………… 62
第五章　一门逻辑学科不合逻辑的发展 ……………………… 95
第六章　不合逻辑的发展：分析的困境……………………… 124
第七章　不合逻辑的发展：19 世纪的困境 ………………… 151
第八章　不合逻辑的发展：天堂之门………………………… 170
第九章　天堂受阻：理性的新危机…………………………… 196
第十章　逻辑主义与直觉主义………………………………… 216
第十一章　形式主义与集合论公理化基础…………………… 248
第十二章　灾难………………………………………………… 263
第十三章　数学的孤立………………………………………… 285
第十四章　数学向何处去？ ………………………………… 315

第一章　数学真理的起源

极度幸福的灵魂，
是为谁而激发！
为了这些真理，
去度量闪烁的星空！
他们用思想的缰绳，
驯服了桀骜的天体。
过去扑朔迷离的天空，
现在变得清清楚楚。

——奥维德

任何值得一提的文明都探索过真理。思索的人们尽管不能，但总是试图去理解复杂多变的自然现象，去解开人类如何定居在这个地球上的谜题，去弄明白人生的目的，去探索人类的归宿。在所有早期文明中，这些问题的回答都是宗教领袖给出的，并为人们所普遍接受。只有古希腊文明是个例外。希腊人发现（人类所作出的最伟大的发现）了推理的作用。正是古典时期（公元前 600

年至前300年间的鼎盛时期）的希腊人，认识到人类有智慧、有思维（有时佐以观察或实验），能够发现真理。

是什么导致希腊人作出这个发现，这个问题不大好回答。把推理用于人类活动和思维的始祖曾生活在爱奥尼亚——古希腊人在小亚细亚的一个定居处。许多历史学家试图依据政治和社会环境对此作出解释，比如，爱奥尼亚人有更大的自主性去无视统治欧洲希腊文明的宗教信仰。但是，我们所知的在约公元前600年以前的希腊历史过于零碎，无法作出明确的解释。

当时希腊人把推理用于政治体系、伦理道德、法律、教育和其他许多方面。他们的主要的、决定性地影响了后代文明的贡献是接受了对推理的最强有力的挑战，知道了自然界有规律可言。在作出这个贡献以前，希腊人和古代其他文明时期的人们认为自然是混乱、反复无常，甚至是恐怖的。自然现象是无法解释的，或者是神的意志决定的，只有用祈祷、祭祀和其他宗教仪式来解脱。其卓越的文明可追溯到公元前3000年的巴比伦人和埃及人，他们确实注意到了日月运动的周期现象，并据此设立了历法，但却没有更深入地研究它们。这些极少的偶然的观察没有改变他们对自然的态度。

希腊人敢于正视自然。他们的精神领袖（如果不是普通民众）摒弃了传统观念、超自然力、迷信、教条和其他思想束缚。他们是最早检验并试图理解各种谜一般的复杂的自然活动的人们。他们以思维与似乎瞬息万变的宇宙现象抗争，将理性之光洒于其上。

他们有着永不满足的好奇心和勇气，他们提出和回答了许多人遇到过、但却极少人试图解决，并且只能被具有最高智力水平的人所解决的问题。整个宇宙的运转是有计划的吗？植物、动物、人类、星系、光和声，仅仅是物理现象还是一个完美设计的一部分？由于希腊人总梦想着提出新见解，所以他们建立了后来统治整个西方思想中关于宇宙的概念。

希腊的智者们对自然采取了一种全新的态度。这种态度是理

性的、批判的和反宗教的。神学中上帝按其意愿创造了人和物质世界的信仰被摒弃了。智者们终于得出了这样的观念：自然是有序的，按完美的设计而恒定地运行着。从星体的运动到树叶的颤动，所有感官能感知的现象都能用一种精确、和谐而理智的形式来描述。简而言之，自然是按理性设计的，这种设计，虽然不为人的行为而影响，却能被人的思维所理解。

希腊人不仅是探索混杂现象的秩序和规则的勇敢的先驱，而且也是以才智发掘出自然现象显而易见所遵循的基本模式的先驱。他们敢于询问并且发现了人类观测到的最壮观的景象的基本规律：朝升夕落的太阳，阴晴圆缺的月亮，光彩夺目的行星，星汉灿烂的夜空，奇妙无比的日蚀、月蚀。

正是公元前 6 世纪的爱奥尼亚哲学家首先尝试寻求对大自然和宇宙运行规律的合理解释。这一时期的著名哲学家们，如泰勒斯（Thales）、阿那克西曼德（Anaximander）、阿那克西米尼（Anaximenes）、赫拉克利特（Heraclitus）和阿那克萨哥拉（Anaxagoras），各自恪守一个主旨去解释宇宙的构成。比如泰勒斯认为万物都是由气态、液态和固态的水组成的，他试图用水的观点解释许多现象——这是一个不无道理的解释。因为云、雾、露、雨和雹是水的不同形态，而水是生命不可缺乏的，它滋润庄稼，养育动物。现在我们知道甚至人体的 90%是水。

爱奥尼亚人的自然哲学是一系列的大胆的观察，敏锐的猜测和天赋的直觉，而不是广泛而细致的科学研究的成果。这些人也许有些过于急切看到世界的全貌，从而匆匆忙忙得到一些泛泛的结论。但他们的确抛弃了一些陈腐的神秘观点，而代之以唯物主义的，对宇宙的设计和运行的客观解释。他们以理性方法取代了幻想和非批判的观点，用推理来论证自己的观点成立。这些人敢于用思维来对待世界，拒绝依赖神灵、意志、鬼怪、妖魔、天使和其他也许能够维护或毁灭自然现象的神秘力量。可以用阿那克萨哥拉的话来表述这种理性观点的精髓：“理性统治着世界。”

摒除故弄玄虚、神秘主义和对自然运动的杂乱无章的认识，而

代之以可理解的规律的决定性的一步是数学知识的应用。在这里，希腊人展示出一种可以与推理的作用的发现相媲美的、几乎同样富有想象力和独创性的洞察力：宇宙是以数学方式设计的，借助于数学知识，人类可以充分地认识它。最早提出自然界数学模式的是以毕达哥拉斯(Pythagoras)为领袖的座落于意大利南部的毕达哥拉斯学派。虽然他们从盛行的致力于灵魂的净化和将它从肉体的污浊束缚中解脱出来的希腊宗教中汲收了灵感和信条，其自然哲学却是完全理性的。毕达哥拉斯派震惊于这样一个事实，即由定性地看各种各样的现象都表现出相同的数学性质，可推知数学性质必定为这些现象的本质。更精确地，他们从数和数的关系方面发现了这种本质。数学是他们解释自然的第一要素，所有物体都是由物质的基本微粒或"存在单元"根据不同的几何形状组成的。单元的总量实际上代表了实在的物体，数学是宇宙的实体和形式。因而毕达哥拉斯学派认为："万物皆数也。"因为数是万物之"本"，对自然现象的解释只有通过数字才能得出。

这种早期的毕达哥拉斯派思想是令人迷惑的。因为对于我们来说，数字是抽象概念，而事物是实际存在的。但我们已经得到了一种数字的抽象，而早期的毕达哥拉斯派并未做到。在他们看来，数字是点或微粒。他们提到三角形数、正方形数、五边形数时，想到的是点集、晶状体或点状物体。如图 1.1—1.4 所示。

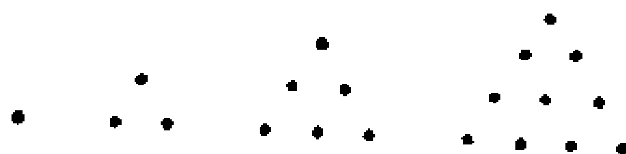


图 1.1　三角形数

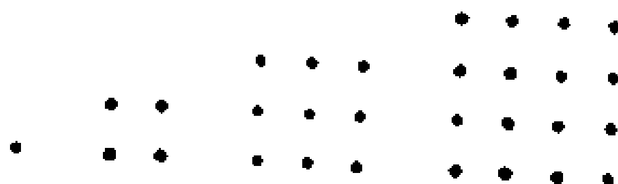


图 1.2　正方形数

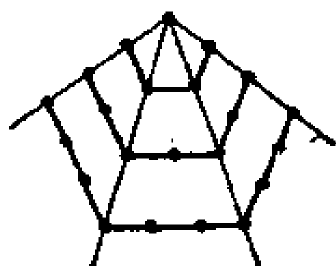


图 1.3　五边形数

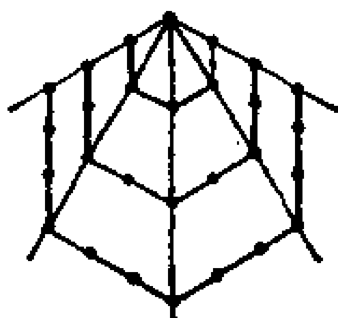


图 1.4　六边形数

虽然历史片断没有提供精确的年代数据，这一点却是无疑的，即毕达哥拉斯学派发展并完善了自己的认识。他们开始把数字理解为抽象概念，而物体只不过是数字的具体化。有了这一后来的特性，我们可以明白菲洛罗斯（Philolaus）的论述："如果没有数和数的性质，世界上任何事物本身或与别的事物的关系都不能为人所清楚了解……"你不仅可以在鬼神的事务上，而且在人间的一切行动和思想上乃至在一切行业和音乐上看到数的力量。

例如，毕达哥拉斯学派之所以能把音乐归结为数与数之间的简单关系，乃是因为他们发现了下列两个事实：第一，弦所发出的声音取决于弦的长度；第二，两根绷得一样紧的弦，若一根是另一根长的两倍，就会产生谐音。换言之，两个音相差八度。如两弦长为 3 比 2，则发出另一谐音。这时短弦发出的音比长弦发出的音高五度。确实，产生每一种谐音的多根弦的长度都成整数比。毕达哥拉斯学派也搞出了一个著名的音阶。我们虽然不打算讲许多希腊时代的音乐，但要指出许多希腊数学家包括欧几里得和托勒密，都写过这方面的著作，特别是关于谐音的配合，而且还制定过音阶。

毕达哥拉斯学派把行星运动归结为数的关系。他们认为物体在空间运动时会发出声音，这也许是从绳端吊一东西摆动时发出声音这一方面引起的特例。他们还认为运动得快的物体比运动得慢的物体发出更高的音。根据他们的关系，离地球越远的星，运动得越快，因此行星发出的声音（我们因为从出世之日起就听惯了，所以觉察不出来）因其与地球的距离而异而成谐音。但因这

“天籁之音”也像所有谐音一样可以推为数的关系，所以行星运动也是这样。

自然界的其他形形色色特性也可“归结”为数。1、2、3、4这四个数，叫四象，是特别受重视的。据说毕达哥拉斯学派的誓词即是：“谨以赋予我们灵魂的四象之名宣誓，长流不息的自然的根源包含于其中。”他们认为自然是由四元性组成的，点、线、面和立体。后来柏拉图强调的则是四种物质元素，土、气、火、水。

四象的四个数字之和为10，所以十是个理想数，其代表宇宙。为了填满这个数字，毕达哥拉斯学派引入了中心地球，加上日、月，已知的五大行星和位于中心地球另一侧的反地球。我们看不到中心地球和反地球，因为我们所居住的那部分地球是背朝它们的。我们在这里不打算详细叙述细节，关键一点是毕达哥拉斯学派将天文学建筑在数的关系之上。

由于毕达哥拉斯学派将天文学和音乐“归结”为数，这两门学科就同算术和几何发生了联系。这四门学科都被人看成是数学学科，甚至一直到中世纪，仍被包括在学校课程中，当时号称“四大学科”。

亚里士多德在《形而上学》一书中，总结了毕达哥拉斯学派对数的现实世界的认识：

> 他们似乎察觉到了存在的以及将要形成的事物在数方面的共性，而不仅仅表现在火、土和水上（这样或那样数字的修正是合法的，另一种是精神和推理，再一种则是机会——同样几乎所有的其他事物都可用数字表达）；又因为音阶的修正和比例可用数字表示；还由于其他事物在本质上都能用数字来模式化，数字似乎是整个自然界的先驱。他们认为所有事物里都含有数的成分，整个太空就是一个音阶或一个数字。

毕达哥拉斯学派的自然哲学很难与实际相吻合。美学考虑和对数学关系的穷追不舍相混合，当然会导致超越实际观察的论断。

毕派也未使物理科学的任一分支向前发展，可以公正地称其理论为肤浅的。但或是凭运气或是凭天生的直觉，毕派的确言中了后来两条证明是极为重要的信条：第一是自然界是按数学原理构成的；第二是数学关系决定、统一并显示了自然的秩序。实际上现代科学也坚持毕派对数学的强调，虽然，正如我们将看到的，现代理论是毕派理论的更为高级的形式。

毕派之后的哲学家更加关注现实世界的本质和基本的数学设计。留基伯（Leuccipus）和德谟克里特（Democritus）由于更加清晰地确定了原子论而闻名于世。他们的共同哲学观点是：世界是由无穷多个简单的、永恒的原子组成的。这些原子的形状、大小、次序和位置各有差异，但每个物体都是由这些原子以某种方式组合而成的。虽然几何上的量，如直线段，是无限可分的，原子却是终极的，不可再分的质点。形状、大小等只是原子的特性，其他性质如味、热则非原子所固有而来自观察者，所以感性认识不可靠，因它随观察者而异。原子论者也和毕达哥拉斯学派一样，认为隐藏在自然界不断变化着的万象之下的真实性是可用数字来表示的，而且认为这个世界上所发生的一切是由数字规律严格确定了的。

继毕达哥拉斯学派之后，传播这种主张最有影响的，当属由柏拉图领导的柏拉图学派。柏拉图接受了一些毕派思想，他控制了公元前 4 世纪这一重要时期希腊人的思想。他是雅典柏拉图学园的创立者，这个学园是一个吸引了当时一流思想家的中心，存在了九百年之久。

也许在柏拉图的对话《爱好者》中，其对于宇宙的合理性的信仰表现得最为出色。

（普洛塔库斯简称普，苏格拉底简称苏）

普：什么问题？

苏：他们所说的宇宙是不可推理、杂乱无序的，抑或像我们前人所认为的是由极高的才华和智慧所控制和有序化的。

普：迷茫的苏格拉底，这两种论点截然相反，你刚才的话我认为亵渎了神明，但是一个观点，即思维统治万物，却是极富有价值的。我别无它求。

后来毕派和柏拉图学派在物质世界和理想世界之间产生了尖锐的分歧。物质世界的事物及联系是不完美、变化和衰落的，因而不能代表终极真理。但有一个绝对而不变的真理的理想世界，这些真理正是哲学家们所关注的。对于物质世界我们只可能有观点，可见、可感知的世界只是理想世界的一个模糊迷离、不完美的拷贝。“事物是思想在经验屏幕上的投影。”由于现实可在感觉和实物中找到，因而柏拉图认为一匹马、一间屋或者一个完美的女子并不真的存在。现实只存在于马、房屋、女子的广为接受的形式或观念之中。永恒的知识只能从纯粹理想的形式中获得，这些思想实际上是永恒不变的。关于它们的知识是稳固而坚不可摧的。

柏拉图坚持认为只有从理想世界的数学知识来理解现实世界的实在性和可知性，无疑这个世界是数学化的。普鲁塔克(Plutarch)道出了柏拉图的名言：“上帝终究要将世界几何化。”在《共和国》一书中，柏拉图认为“几何学所要求的知识是永恒的，而不是转瞬即逝或反复无常的。”数学定律不仅是现实的本质，而且永恒不变。数字关系也是现实的一部分，实际事物不过是数字的模拟体。早期毕派认为数字是事物内在固有的，而柏拉图认为数字超越了事物。

柏拉图比毕派前进了一步，他不仅希望用数学来理解自然界，而且要用数学来取代自然界本身。他相信，对物质世界仅用少量决定性的几步推理，即能得到基本的真理。按此观点将只有数学存在，数学将取代物理研究。

普鲁塔克在他的《马塞鲁斯的生平》一书中提及欧多克斯(Eudoxus)和阿基塔斯(Archytas)(柏拉图同时代的名人)运用实际论据来“证明”数学结果。但柏拉图义愤地贬斥这种证明为几何学的堕落；指责他们利用感性知识来取代纯粹的推理。

柏拉图对于天文学的观点显示了他正在探索这门科学的立场。他认为，这门学科研究的不是可见的天体的运动。天空中星体的排列和明显可见的运动的确奇妙美丽，但仅有对运动的观察和解释远称不上真正的天文学。在接触这门真正的科学之前，我们必须抛开“天体”，因为真正的天文学探求的是数学化宇宙中星体的运动定律，而可见的天体只是其不完美的表现形式。他鼓动人们献身于理论天文学，因为其问题取悦于人的心智而不是视觉，其对象由人的心智就能感受到而不是凭眼睛所看见。天空中呈现出的各种图形只可用作探索更深层真理的辅助图表。我们必须把天文学看成几何学一样，仅仅是由可见事物揭示的一系列问题。柏拉图对航海、历法和计时中的天文学的使用并不感兴趣。

亚里士多德虽然是柏拉图的学生并从老师那儿继承了许多思想，对于现实世界以及数学和现实之间的关系的探究却有着不同的看法。他批评柏拉图的冥世思想以及把科学归结为数学的认识。亚里士多德是个物理学家，他相信物质的东西是实在的主体的源泉。物理学乃至一般的科学必须研究现实世界并从中获取真理。真正的知识是从感性的经验通过直观和抽象而获得的，这种抽象不能独立于人的思维而存在。

亚里士多德的确强调从实物中抽象出的普适的一般的性质。为了获得这些性质，他认为我们应“从可知和可观察的事物出发，向着本质上可为人们认识的逐渐清晰的事物前进。”他抽取物体的明显的感性特征，使之具体化并上升为独立的精神上的概念。

在亚里士多德关于事物的分类方案中，把数字摆在什么地位呢？物理科学是基础科学，数学则从描述形式上的特征（如形状和数量）这方面来帮助研究。它也为物质现象中观察到的事实提供解释。例如几何说明光学和天文学提供的事实，算术上的比例关系能说明产生谐音的理由。但数学概念和原理肯定是从现实世界中抽象出来的，正因为如此，它们也可用于现实世界。思维使我们可以从感性认识获得实物的理想化特征，这种抽象必然是真实的。

对于铸造和构成了希腊思维世界的哲学家的短暂回顾也许有助于说明为什么他们为了了解、欣赏更深层次的内涵，都重视对实质的探讨。而且，从毕达哥拉斯开始，所有哲学家都认为世界是依照数学设计的。在这个经典时期末期，上述观点已经确立，并且开始了对数学规律的探求。虽然这个观点并未影响后世所有的数学家，但一旦为人接受，它就作用于大多数伟大数学家的思维，甚至影响了那些尚未接触过它的人。希腊人这一重要思想的最大胜利是他们认为宇宙是按可为人类思维所能发掘的数学规律运行的。

于是希腊人决定寻求真理，特别是关于自然的数学化设计的真理。人们怎样寻求真理并证明其是真理呢？在此，希腊人也绘出了方案。这个方案在从公元前 600 年到公元前 300 年这段时期逐渐发展，它是何时由何人最先提出尚无定论，但到公元前 300 年，它已经相当完善了。

从广义的、使用数字和几何图形这方面来看，数学早于古典时期希腊人的研究几千年就开始形成了。广义来讲数学包括了许多已经消失了的文明（最有名的有埃及文明和巴比伦文明）的贡献。除了希腊文明外，在其他文明中数学并不是一个独立体系，它没有形成一套方法，仅为了直接而实用的目的被研究。它是一种工具，是一系列相互无关的、简单的、帮助人们解决日常问题的规则，如推算日历、农业和商业往来。这些规则是由试探、错误、经验和简单的观察得到的，许多都只是近似的正确。这些文明中的数学的最优之处在于，它显示了思维的某些活力和坚韧，尽管不严格，成就也远非辉煌。这类数学的特点可用经验主义一言蔽之。巴比伦人和埃及人的经验主义数学为希腊人的研究工作揭开序幕。

虽然希腊文明没有完全脱离外界影响——希腊思想家们曾在埃及和巴比伦游历学习——尽管现代意义上的数学必须经受希腊的理性氛围的熏陶，希腊人的创造与他们所吸收的知识却有天壤之别。

希腊人已决心探索数学真理，他们不能把工作建筑在前人（有名的埃及人和巴比伦人）粗糙的、经验主义的、有限的、零散的，在很多情况下是不精确的成果之上。数学原本是一些关于数字和几何图案的基本事实，必然是一个真理体系。数学推理旨在推导出关于自然现象，如天体运动的真理，必然得出不容置疑的结论。怎样达到这些目的？

数学的本原应是处理抽象对象。对于创造了希腊数学的哲学家来说，严格的真理只适用于永恒不变的实体以及关系。幸运的是，人类由对事物的感性认识得到的认识可以上升为较高层次的理念，这便是思想，永恒的现实和思想的真实载体。青睐抽象还有一个原因，欲使数学更强有力，就必须在一个抽象概念中包涵它所表示实物的本质特征。从而数学上的直线必须包括拉伸的绳子、直尺边、田地的边界和光线的路径。相应地，数学上的直线没有粗细、颜色、分子结构和绷紧度之分。希腊人明确地指出数学是处理抽象事物的。柏拉图在《共和国》中提及几何学家：

> 你是否也知道，他们虽利用可见的形象并拿来进行推理，但他们想的并不是这些东西，而是类似于这些东西的理想形象；他们所看到的不是所画的图形，而是绝对正方形及绝对直径……。他们力求看到事物本质，而这只有用心灵之目才能看到。

因而数学首先处理点、线和整数等抽象概念。其他概念，如三角形、正方形和圆可以用基本概念来定义，而基本概念正如亚里士多德所说应该是不可定义的，否则就没有起始点。希腊人的精明之处表现在，他们要求被定义的概念应有现实的对应物体，或是论证得到或是构造得到。因而人们无法定义三等分角并证明有关它的定理，它可能并不存在。实际上，由于希腊人无法在他们自己提出的作图条件下三等分角，他们就没有引入这个概念。

为了推导出数学概念，希腊人从自明的、无人怀疑的公理入手。柏拉图用他的回忆理论证明了公理的可行性。正如我们前面提到过的，他认为存在一个真理的客观世界。人在出世前有过精

神世界的经历，只要激发一下就可以回忆起以前的经历从而认识到几何学公理是真理，这并不需要实践。但亚里士多德并不这样认为，他认为公理是可理解的原理，符合思维而没有什么可怀疑的。亚里士多德在《后验分析》中指出，我们凭着绝对可靠的直觉认识到公理是真理，而且，我们必须以这些公理作为推导的基础。相反，如果使用了一些并未证明是真理的事实，下一步推理就需要证明这些事实，而这一过程是无限循环的，那么这就变成了永无止境的回退。他又区分了公理和公设，公理对所有思想领域皆真，包括“等量加等量还是等量”这样的命题。公设则适用于专业学科，如几何学。从而有，“两点决定一条唯一的直线”。亚里士多德也的确指出公设无需一望便知其为真，但应被其所推出的结果所支持。然而这种不证自得的真理是数学家所需要的。

从公理出发，可用推理得出结论。有多种推理方法，比如，归纳、类比和演绎，其中只有一种能够证明结论的正确性。由一千只苹果都是红的而得出苹果都是红的这个结论，是归纳，不一定可靠。类似的，由于约翰的兄弟已从大学毕业，而约翰受教于同样的老师，所以也应该能从大学毕业，这是由类比推出的推理，当然也是不可靠的。然而，如果假定人终将一死，而苏格拉底是人，则必然接受苏格拉底也会死这样的结论。这里所涉及到的逻辑，亚里士多德称之为三段式演绎法。在亚里士多德的其他推理规则中，还有归谬法（一个命题不可能既真又假）及排中律（一个命题必须为真或假）。他和世人都毫无疑问地承认这些推理原理用于任一前提时，推导出的结果和前提一样可靠。因此，如果前提为真，则结论也为真。值得一提的是，后面我们将要讨论的，亚里士多德从已为数学家所应用的推理方法中抽象出了演绎逻辑法。

虽然几乎所有希腊哲学家都宣称演绎推理是获取真理的唯一可靠方法，柏拉图的观点却有些不同。他虽然不否定演绎证明，却认为没必要。因为数学公理和定理存在于不依赖于人的意志的客观世界，根据柏拉图的回忆理论，人们只须回忆并且承认他们那些毋庸置疑的真理，用柏拉图在《西艾泰德斯》一书中的比喻来

说，定理，就像关在鸟笼中的鸟。它们呆在那里，你只须伸手进去抓住它们。学习就是一个收集的过程。在柏拉图的对话《梅农》里，通过巧妙地询问一个年轻奴隶，苏格拉底证实了同底等高的正方形面积是等腰三角形面积的两倍。从而苏格拉底成功地得出结论，即便是没有受过几何学训练的奴隶也可以在适当的提示下回忆起来。

认识到人们是多么坚定相信演绎推理是很重要的。假设一位科学家在不同地区测量了一百个形状大小不同的三角形，发现它们的内角和在实验精度允许范围内都是180°，他当然可以下结论，任何三角形的内角和都是180°。但他的证明是归纳而不是演绎，从而在数学上不会被认可。同样，只要你高兴，你可以检验任意多的偶数，发现它们都是两个素数的和，但这种检验也不是演绎证明，因而结果也不是数学定理。那么看来，演绎证明是一种很严格的要求。但是，希腊的数学家们，他们（主要是哲学家）坚持一定要用演绎推理，因为这样可以得到真理，永恒的真理。

哲学家们偏爱演绎推理还有一个原因，他们致力于理解人类和物质世界的广泛知识。为了建立普遍成立的真理，如人性本善，又如世界是既定的，或人本有为而生之，从可接受的基本原理进行演绎推理要比用归纳或类比，更加可行。

古希腊人喜爱演绎法的另一个原因应归结于他们的社会构成。富有阶层进行哲学、数学和艺术活动，这些人不干体力劳动。奴隶、非公民和自由手工业者，从事商业和家务劳动，甚至从事最重要的职业。受过教育的自由人不动手，很少进行商贸活动。柏拉图认为商贸活动，对于自由人来说是堕落，他还希望，如果自由人从事了这一行，就要被视为犯罪而受到惩罚。亚里士多德认为在理想条件下公民（与奴隶相对）不应从事任何商业。在毕欧钦人（Boeotian，希腊人的一个部落）中，用商务来亵渎自己的人十年内不得担任公职。对于这种阶层里的思想家，是不用实验和观察的，因此也无法从中获得科学或数学结论。

虽然希腊人坚持运用演绎推理的原因很多，但还有一个问题，

即：是哪个哲学家或哲学派别首先提出这个要求的。遗憾的是，我们对于苏格拉底时代以前的哲学家们的学说和著作的认识是零碎的，尽管众说纷纭，却无定论。到了亚里士多德时代，对演绎推理的要求已经确定，因为他阐明了不可定义概念的必要性和推理方法的严格标准。

希腊人欲得到宇宙的数学规律，他们在这方面成就如何呢？由欧几里得、阿波罗纽斯（Apollonius）、阿基米得（Archimedes）和托勒密（Ptolemy）所创立的数学的精华有幸传给了我们。在时间上他们属于希腊文化的第二个重要时期，亚历山大里亚时期（公元前 300 年—公元 600 年）。在公元前 4 世纪，马其顿的菲利浦王着手征服波斯人，后者控制了近东，是欧洲希腊人的世敌。菲利浦被刺后，其子亚历山大继承了王位。亚历山大击败了波斯人，把扩大的希腊帝国的文化中心迁到了一个他谦虚地以自己名字命名的新城市。亚历山大死于公元前 323 年，但他发展新中心的计划由其在埃及接受了托勒密王号的后继者继续。

可以肯定欧几里得约于公元前 300 年生活在亚历山大里亚，在那里教育学生，虽然他自己也许是在柏拉图学院完成了学业。顺便提一句，这是我们所了解的欧几里得个人生活的全部。欧几里得著作具有系统、演绎的形式，是许多古希腊人孤立发现的汇合，他们的主要著作《几何原本》给出了空间和空间中图形的规律。

欧几里得的《原本》是他对空间几何的全部贡献。欧几里得从一本已失传的书中接收了圆锥曲线的理论，在亚历山大里亚学习数学的小亚细亚拍加人阿波罗纽斯，继续其关于抛物线、椭圆和双曲线的研究，并写出了这方面的经典著作《圆锥曲线》。

在亚历山大里亚受教育而生在西西里的阿基米得对纯几何学知识增添了几本著作《论球和圆柱》，论《劈锥曲面体与球体》，《抛物线的求积》。他都是用欧多克斯（Eudoxus）提出的方法来计算复杂的面积和体积，后来被称作穷竭法。现在这些问题可用微积分来解决。

希腊人对空间和空间图形的研究，作出了一个重要贡献——

三角学。这一学科的创始人是喜帕恰斯。他生活在罗德斯和亚历山大里亚，约死于公元前125年。三角学由梅内劳斯（Menelaus）发展，并由在亚历山大里亚工作的埃及人托勒密给出完整的、权威的描述。他的主要著作《数学汇编》，阿拉伯人称之为《大汇编》，知名度更广。三角学研究三角形边、角的量化关系。希腊人主要关注球面上的三角形，其边是由大圆（圆心在球心）弧组成的。因为在希腊天文学中，行星和恒星沿大圆运行，所以他们的三角学，主要应用于行星和恒星的运动。同一理论加以改变，又可用于平面上的三角形，这正是我们现在学校里所学的那种三角学形式。三角学的引入要求其使用者具有较高深的算术和某些代数知识。希腊人怎样在这些领域内工作的，我们将在后面讨论（见第五章）。

借助于这样一些发现，数学从模糊的、经验的割裂状态转变成为辉煌的、庞大的、系统化的和充满智慧的创造物。然而，欧几里得、阿波罗纽斯和阿基米得的经典著作（托勒密的《大汇编》是个例外）所涉及到的空间及空间图形的性质却囿于视野之内，对其中所蕴含的更广泛意义却少有提示。这些著作似乎和揭示自然的真理无关，实际上，他们只是给出了一种形式上的、精练的演绎数学。在这方面，希腊数学课本与现代数学课本和文献没有什么两样。这些书的目的仅仅是为了组织和显示已取得的数学成果，而省略了这些工作的动机，定理的来源和提示及其应用。因而许多研究古希腊科学的人都认为，古希腊这一时期的数学家主要是为了数学本身而探索数学，他们指出并证实了这个论断，并提及欧几里得的《原本》及阿波罗纽斯的《圆锥曲线》这两部当时最著名的著作。然而，就像仅凭二项展开式定理就得出牛顿是一个纯粹数学家的结论，他们仅凭这两部著作就得了这个论断，视野未必过于狭窄。

真正的目的是探索自然。在物质世界的探索中，甚至连几何学的真理也是非常重要的。很清楚，对于希腊人，几何学原理是宇宙的整体结构的体现，空间是其中的基本组成部分。因而关于

空间和空间图形的探索是宇宙探索的基本工作，几何学实际上是一门更大的宇宙科学的一部分。比如，当天文学数学化时（在柏拉图时代出现），球体上的几何学研究就着手进行了。实际上，希腊语中的球一词，对毕达哥拉斯派的人来说，就意味着天文学。欧几里得的《现象》就是专门讨论用于天文学的球面几何学的。有了这些证据和对更近代的数学的发展状况更充分的了解，我们也许可以肯定这一点，即科学探讨必然会引起数学问题，而数学是探索自然的一部分。我们不必专门去研究这些，只须检验希腊人在探索自然中做了些什么，以及这些人中包括谁。

物理科学中最伟大的成就是在天文学上取得的，柏拉图很清楚巴比伦人和埃及人做出的大量天文学观测，但却强调说他们没有建立或统一理论，没有对看上去无规律的行星运动作出解释。欧多克斯（柏拉图学园里的一名学生，其纯粹几何学工作包括在欧几里得《原本》的第五篇和第十二篇中）着手解决“整理外观”的问题。他的解答是历史上第一个相当完备的天文学理论。

我们描述欧多克斯的理论，只是为了表明它是完全彻底的数学化理论，并且涉及到天体的相互作用。这些球体，除了那个固定的恒星外，都不是物质实体，而是数学的构想。他也不想尝试去描述引起球体转动的力，他的理论在思想上是极先进的，因为在今天，科学的目的就是为了寻求数学描述而不是物理解释。在欧多克斯之后这一理论为三位最著名的理论天文学家阿波罗纽斯、喜帕恰斯和托勒密所继承，其成果包括在托勒密的《大汇编》一书里。

阿波罗纽斯关于天文学的著作现已失传。他的著作，被希腊人，甚至包括托勒密在他的《大汇编》（第十二篇）中广为引用。他作为一个天文学家是如此著名以致获得了艾普西隆（希腊字母 ϵ 的读音）的雅号，因为他对月球运动做了许多研究工作，而 ϵ 是月球的记号。关于喜帕恰斯的工作我们只知道一点，他的工作也同样地被《大汇编》引用。

现在我们所承认的托勒密天文学的基本方案在欧多克斯和阿

波罗纽斯时代的希腊天文学就已形成。在这种方案中，行星 P 以 S 为中心作匀速圆周运动，而 S 本身以地球 E 为中心作匀速圆周运动。S 运动的圆叫从圆，P 运动的圆叫周转圆。对某些行星来说，点 S 就是太阳，但在其他情形下则只不过是数学上假设的一个点。P 与 S 的运动方向可能相符，可能相反，太阳和月球的情况就属于后一种。托勒密也将这套方案加以变化来描述某些行星运动。通过适当选取周转圆和从圆的半径以及天体在周转圆上的和周转圆心在从圆上的运动速度，喜帕恰斯和托勒密所描述的天体运动与那时的观测结果十分吻合。从喜帕恰斯时代起，人们就能预报月蚀，误差不超过一两小时，但对日蚀的预报却不那么准。这种预报之所以可能，是托勒密运用了他称之为专门为天文学而发明的三角学。

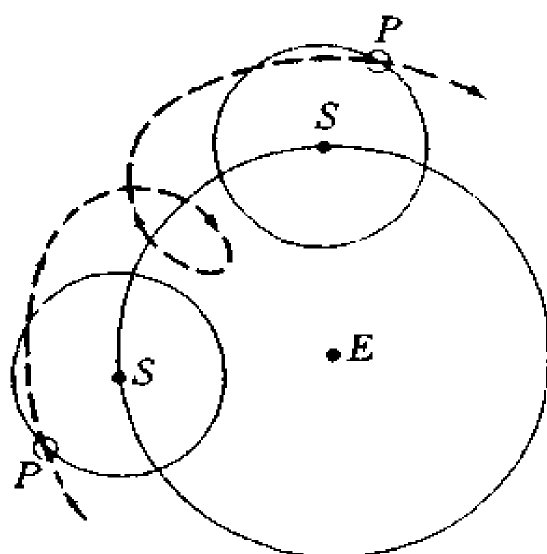


图 1.5

从探求真理的观点来看，值得提及的是托勒密和欧多克斯一样，充分认识到他的理论只是符合观测结果的方便的数学化描述，而不一定是自然的真正设计。对于某些行星，他有几种可供选择的方案，他选择了数学上较简单的那个。托勒密在他的著作《大汇编》的第十三篇中说，在天文学上，人们应寻求尽可能简单的数学模型。但托勒密的数学模型，被基督教接受为真理。

托勒密的理论提供了第一个相当完整的证据，说明自然是一致的而且具有不变的规律，而且也是希腊人对柏拉图提出的合理解释表观天体运动这一问题的最后解答。在整个希腊时期没有任何一部著作能像《大汇编》那样对宇宙的看法有如此深远的影响，并且除了欧几里得的《原本》以外，没有任何别的著作能获得这样毋庸置疑的威信。

对希腊天文学的这一简短叙述，自然不足以显示即令只是在这里所提到的几位希腊学者工作的深度和广度，并且还略去了其他许多贡献。希腊天文学博大精深，并且应用了大量数学，而且，几乎每一位希腊数学家，包括大师欧几里得和阿基米得，都研究过天文学。

希腊人关于实在的真理的成果并不局限于空间和天文学的数学，他们还创建了力学。力学研究可作为质点处理的物体及经过外延后的物体的运动，还有引起运动的力。在《物理学》一书中，亚里士多德把标志希腊力学顶峰的运动定理归纳到一起。和他的所有物理学一样，他的力学也是建立在一些理性的，似乎是自明的原理之上，与观测结果完全吻合。虽然这一理论支配世界几近两千年，但我们不打算重述，因其为牛顿力学取而代之。关于亚里士多德运动理论值得一提的是阿基米得关于物体重心的工作和杠杆定律。所有这些，都体现了数学的重要作用，从而更加证实了数学是洞察自然设计的基础。

继天文学和力学之后，光学成为人们最经久探索的学科。这门数学学科也是希腊人创建的。从毕达哥拉斯派开始，几乎所有的希腊哲学家都致力于光、像和色的性质的探索。我们关心的却是这些方面的数学成就。第一项成就是西西里岛阿格里真坦的伊姆班道克斯（Empedocles of Agrigentum）先验地提出的光以有限速度行进的说法。光学的第一批系统性著作是欧几里得的《光学》和《镜面反射》。《光学》研究视像问题以及怎样从视像确定物体的大小。《镜面反射》描述从平面镜、凸透镜和凹透镜反射出来的光的习性以及它对我们视觉的影响。这书也像《光学》一样，是从实际上就是公设的一些定义出发的。定理1（现代教科书上是一条公理）称为反射定律，是几何光学的一条基本定理。这定理说从 A 点出发的入射光线与镜面所成角 A 等于反射光线与镜面所成角 B（见图1.6）。欧几里得还证明了光线照射在凸透镜或凹透镜面上的规律（见图1.7）。在切点处，他以切线来代替镜面。这两本书在内容及编排上都是用数学来处理的，像欧几里得的《原

本》一样，定义、公理和定理贯穿始终。

从反射律出发，数学家和工程师海伦（Heron）推出一个重要结论。如果 P 和 Q 是图 1.6 中直线 ST 同侧的任意两点，则从点 P 到直线再到点 Q 的一切路径中，以通过直线上点 R 使线段 PR 和 QR 与直线的夹角相等的那条路径为最短，而这恰好就是光线所经过的路径。所以，光线从 P 出发经过镜面再到 Q 是采取最短路程的。很明显，自然界是很了解几何且运用自如的。这个命题出现在海伦的《镜面反射》一书中，那也是讲述凹透镜、凸透镜和反射镜的组合的*。

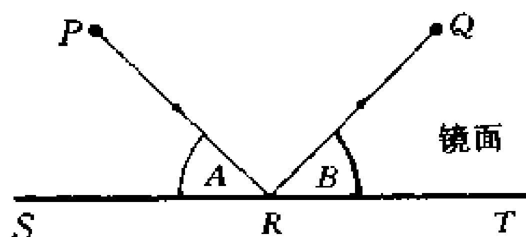


图 1.6

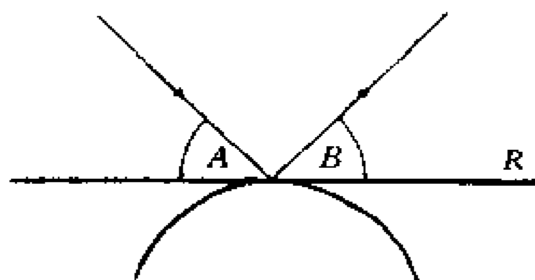


图 1.7

有不少著作是论述光线在各种形状镜面上的反射的，其中有阿基米得所著而现已失传的《镜面反射》以及迪奥克斯和阿波罗纽斯所写、书名同为《论点火镜》的两部著作。点火镜是呈球面形、旋转椭球面型（椭圆绕其长轴旋转而生成的形体）和旋转抛物面型的凹透镜。阿波罗纽斯肯定知道，而且迪奥克斯的书里也包含有抛物镜面能把焦点处发出的光反射成平行于镜面轴的光束（见图 1.8）的证明。反之，若照射的光线平行于轴，则反射后就聚集在焦点处，这样就可把太阳光聚集在焦点处产生高温，从而有点火镜之名。据说阿基米得就是利用抛物镜面的这一性质把日光集中到围攻他的家乡叙拉古的罗马船上使它们起火的。阿波罗纽斯也知道其他圆锥曲线的反射性质，例如，从椭圆镜面一焦点

* 我们今天所拥有的版本，也许是包括欧几里得在内，若干人著作的汇编。
——原注

发出的光经反射后会集中到另一焦点上，他在所著《圆锥曲线》第三篇里讲述了椭圆和双曲线的有关几何性质。



图 1.8

希腊人还创建了许多其他学科，著名的有地理学和流体静力学。施勒尼的厄拉多塞（Eratosthemes of Cyrene）是亚历山大里亚图书馆馆长，被认为是古代最有学问的人。他计算了为希腊人所知道的地球上的许多重要地点之间的距离。他也对地球（大圆）的周长作了一个著名而相当准确的计算，并写了一本书《地理学》。在书中他不但描述了他所用的数学方法，而且给出了地表变化的原因和解释。

地理学最深刻的著作是托勒密那部包含八个篇章的《地理学》，托勒密不仅拓展了厄拉多塞的工作，而且用和我们现在所用的完全类似的经纬度，定位了地球上 8000 个位置。托勒密也给出了绘制地图的方法，其中，有些现在还在运用，特别是球极平面投影法。在所有这些地理学工作中，从公元前 4 世纪就开始应用的球面图形的几何学是基础。

流体静力学这门学科讨论放置在水中的物体所受到的压力，阿基米得的《论浮体》一书是这方面的奠基作。像我们曾讨论过的所有其他著作，其方法和结论推导都是彻底的数学化。特别的，它包含了现在称之为阿基米得原理的定律：浸在水中的物体受到的浮力，等于其所排开的水的重量。为什么人们能在肆虐泛滥的世俗洪水中免于沉沦，我们也要归功于阿基米得。

尽管对数学的演绎推导和自然定律的数学表示统治了亚历山大里亚希腊时期，我们还应该注意这一时期的人与古典希腊时期

的人不同，他们也求助于实验和观测。他们继承并利用了巴比伦人两千多年来所获得的相当精确的天文学观测结果。喜帕恰斯把当时能够观察到的星体制成表格，当时的一些发明物（主要由阿基米得和数学家及工程师海伦完成）包括日晷、星盘、蒸气和水力的运用。

由埃及亚历山大的直接继承者托勒密一世创办的亚历山大里亚艺术宫极为闻名。艺术宫内学者云集，有一个藏书400，000册的著名图书馆，由于它无法存放所有的手稿，另外300，000卷便存放在塞拉皮斯的神庙里。学者们也为学生授课。

利用他们的数学成就和许多科学研究结果，希腊人对宇宙是依据数学设计的，给出了充分的证明。数学实质上存在于宇宙万物之中，它是关于自然界结构的真理，或者如柏拉图所说，是物质世界的客观存在。宇宙存在规律和秩序，数学是达到这种有序的关键。而且，人类理性可以洞察这个设计并且揭示其数学结构。

对自然作逻辑的、数学的探索的概念主要来自于欧几里得的《原本》，虽然这一著述旨在研究物理空间，但其编排组织，独创性和清晰度激发了公理演绎方法，不仅适用数学的其他领域，如关于数字的理论，而且适用于所有科学。所有基于数学的物理知识的逻辑化结构通过这本书进入了理性世界。

这样希腊人建立了数学和对现代科学基础的自然设计的探讨之间的联系。直到19世纪后半叶，对数学设计的探求，即对真理的探求，认为数学规律是自然界的真理的信念为数学吸引了最深刻和最著名的思想家。

第二章 数学真理的繁荣

> 对外部世界进行研究的主要目的在于发现上帝赋予它的合理次序与和谐，而这些是上帝以数学语言透露给我们的。
>
> ——开普勒

宏大的希腊文明被几股力量所摧毁，首先就是来自希腊、埃及和近东罗马人的逐渐侵占。罗马人扩充政治势力的目的并不是要传播它的唯物主义文化，而是使被征服的地区成为殖民地，通过剥削和捐税，可从中搜刮巨大的财富。

基督教的兴起是对异教的希腊文化的另一个打击，尽管基督教的领袖们为使基督教更易于被接受，采纳了许多希腊人和东方的神话和习俗，但他们仍然反对异教徒的学问，甚至嘲弄数学、天文学和物理学。尽管受到罗马人的残酷迫害，基督教仍广为流传并且变得如此强大以至于罗马皇帝君士坦丁大帝（Constantine the Great）在公元313年的米兰诏书中将基督教定为国教。后来，狄奥多西（Theodosius）废除了异教并且在392年发布命令拆毁他

们的神庙。

成千上万的希腊图书被罗马人和基督徒所焚毁，在公元前47年，罗马人纵火焚烧亚历山大里亚港口内的埃及船只，火势蔓延烧毁了藏书最丰富的古代图书馆。在狄奥多西禁止异教的年代里，基督徒摧毁了亚历山大里亚城内唯一保存大量希腊著作的塞拉皮斯神庙，其他许多写在羊皮上的著作也被基督徒刮掉以便写他们自己的著作。

罗马帝国的后期历史也与此类似，狄奥多西将他广阔的疆土分给了他的两个儿子，霍诺留统治意大利和西欧，阿卡丢统治希腊、埃及和近东。西部在公元5世纪时被哥特人占领，所以其后续历史属于中欧，东部则保持了独立。由于东罗马帝国，也被称为拜占庭帝国，容纳了希腊和埃及，在某种程度上说，希腊文化和希腊著作被保存了下来。

对希腊文明的最后打击是公元640年新崛起的回教徒对埃及的征服。残剩的图书被焚毁一尽，其理由正如阿拉伯征服者奥玛尔所说的：这些书的内容或许可兰经里也有，那么我们不必读它；这些书里或许有反对可兰经的内容，那我们不准读它。因此在亚历山大里亚的浴室里接连有六个月用羊皮纸来烧水。

回教徒占领埃及以后，大多数学者迁居到当时的东罗马帝国的首都君士坦丁堡。尽管在不友好的拜占庭基督教氛围内没有什么按希腊思想轨迹的活动能兴旺发达，但这些学者及其著作汇集到相对安全的地方，却丰富了几百年后流传给欧洲的知识宝库。

印度人和阿拉伯人使得数学活动得以延续，并且引入了一些对后世有较大影响的思想*。从公元200年至1200年，印度人在某种程度上受过希腊著作的影响，对算术和代数做了一些有独创性的贡献。阿拉伯人，在其鼎盛时期，王国已扩充到濒临地中海的所有陆地并伸入近东，包括了许多被回教徒统一的种族。他们吸收了许多希腊人和印度人的成就并取得了一些属于自己的发

* 在第五章我们将更多地讨论印度人与阿拉伯人的工作。　——原注

展，这些成就含有亚历山大里亚希腊人的精神，混和了演绎推理和实验。阿拉伯人对算术、几何、天文学和光学均做出了贡献，他们也建立了旨在传播知识的学院和学校，阿拉伯人值得称道之处在于：尽管他们是他们自已宗教的忠实信徒，但并没有允许宗教的教旨限制他们的数学和科学研究。

抛开印度人和阿拉伯人都从希腊人建立的坚实的基础中获益的事实不谈，尽管他们发展了希腊的数学和科学，但他们并没有像希腊人那样渴望理解宇宙的结构。阿拉伯人广泛地翻译，评论甚至批判希腊人的著作，但是，没有什么非常重要或有价值的东西去丰富已知的真理。到公元1500年，他们的王国被西部基督徒和东部的内战给毁掉了。

正当阿拉伯人建设和扩大他们的文明时，另外一种文明在西欧产生了。在中世纪的西欧，一种高水平的文化被建立起来，从公元500年一直延续到1500年，这种文化被天主教教会所控制。然而，不管其多么精深，值得称道，也不会有利于对现实世界的研究。上帝统治了宇宙，人的作用只是侍奉和取悦于神，这样就可使灵魂得救，从而可在阳光明媚、欢乐幸福的来世永生。今世生活水准无足轻重，并且痛苦和磨难不仅应该忍受而且事实上必须经历，以之来检验对神的忠贞不二。因此，在希腊时代，由于研究现实世界的需要而激起的对数学和科学的兴趣在当时处于低谷就可以理解了。中世纪欧洲的学者虽然是真理的孜孜不倦的探求者，却是到《启示录》和《圣经》中去寻找真理，因此中世纪的思想家没有为自然界的数学设计提出新的证据。然而，后来的中世纪哲学确实承认自然行为的规律性和一致性，尽管这被认为是上帝的意志的结果。

后来，中世纪欧洲被一系列的变革所震撼和改变。在中世纪文明转为现代文明的许多事物中，我们所最关心的是希腊著作的获取和研究。我们知道这是通过阿拉伯人的翻译和完好无损地保存在拜占庭帝国的希腊著作而得到的。事实上，当土耳其人在1453年征服这个帝国时，许多希腊学者带着他们的著作向西逃

窜，正是从这些希腊著作中，睿智的欧洲文艺复兴领袖们知道了自然是依照数学而设计的，而且这种设计是和谐统一、美妙悦人的，它正是自然界的内在真理所在。自然界不仅仅是合理的、有秩序的，而且是依照恒定的，不可抗拒的法则来运转的。欧洲的科学家就像希腊人的孩子一样开始了他们对自然界的探索。

希腊思想的复苏引起了一些人对研究自然的兴趣，但是，数学和科学复苏的速度和强度是由许多其他的因素引起的。使一种文化消亡并且培植了另一种文化的作用力是多方面的而且是极其复杂的。关于科学的兴起已经被许多学者研究过并且许多历史书已经非常确切地描述了其原因，除了引证它们以外，我们在这不必再做什么。

一个自由工匠阶层的产生，紧接着对数学、技能和技术的兴趣引出了一些科学上的难题。以寻找原料和黄金为动机的地理探险导致掌握了一些以前不为人知的陆地和习俗的知识。这些对中世纪欧洲文化提出了挑战，新教变革反对某些天主教义，因而引发了二者之间的论战。清教徒向人们强调工作和知识的用处。火药的引入，引出了新的军事问题。例如抛物体的运动及在海洋上航行好几千英里不见陆地，都促进了对自然的研究。印刷术的发明使过去一直由教会控制的知识的传播成为可能。尽管权威们对到底是哪一个或哪些外力影响了对自然的探求各执己见，但是，这些力是如此之多，足以使我们注意到这样一个被普遍接受的事实，对科学的探索确实是现代欧洲文明的最主要特征。

欧洲人通常并不立即对新的冲击和影响作出反应，在标榜为人文主义的年代中对希腊著作的研究和吸收远甚于对希腊人的目标的追逐，但是大约到了公元 1500 年，被灌输了希腊目标的思想——即推理在自然研究中的应用以及对数学设计的根本原因的探索——开始活跃起来。然而，他们面临一个难题，希腊目标与当时盛行的文化产生了冲突。希腊人相信自然界的数学设计，自然界亘古不移地遵守某个理想的方案。而后来中世纪学者把所有的方案和行为都归于上帝，他是设计者和创造者，而且所有的自然

界行为都遵循他制定的规则，宇宙是他的杰作，是他的意志的产物。文艺复兴时期及后续几个世纪的数学家和科学家都是正统的基督徒因而接受了以上宗旨，但是天主教学说中决不会包括自然界的数学设计这样的希腊教条，那么怎样使试图弄清上帝的宇宙和探求自然界的数学法则和谐一致呢？答案就是再增加一条新教义，即上帝依照数学设计了宇宙，这样，以理解上帝的意愿和他的创作为最高宗旨的天主教教旨就以探求上帝对自然的数学设计的形式出现。事实上，16、17 世纪及 18 世纪的大半，数学家所做的工作都是宗教的需要。这一点我们不久会看得更清楚，探索自然界的数学法则是一种很虔诚的工作，其揭示上帝的杰作的伟大和辉煌。数学知识，即是关于上帝的宇宙设计的真理，就像任何一条《圣经》的经文一样神圣不可侵犯。人类不可能指望像上帝自己那样清楚地明白上帝的意图，但人至少可以以谦恭和虔诚的态度来接近神的思想，这样就可以明白神创造的世界。

人们更进一步断言：存在支配自然现象的数学规律，并且不懈地探求，因为他们还先验地相信，上帝已将这些规律融入了宇宙结构中，每一个自然法则的发现都被视为神的英明的证明而不是证明研究者自己。数学家和科学家例证了文艺复兴时期席卷欧洲的更广泛文化现象。最近重新发现的希腊著作向人们展示了一个极为虔诚的基督教世界，其中每一个教派的领袖都被另一个教派的教条所吸引并相互采纳。

希腊人的宗旨——自然是依数学设计的，与文艺复兴时的信念——上帝是这个设计的作者，融汇在一起，统治了欧洲，关于这一点最令人信服的证据就是哥白尼和开普勒的工作。直到 16 世纪，唯一合理和实用的天文学理论是喜帕恰斯和托勒密的地心说，这套理论被职业天文学家所接受并应用于历法推算和航海。新天文学理论的工作是由哥白尼开创的，他于 1497 年入波伦亚大学学习天文学，在 1512 年他被任命为东普鲁士瓦尔明佛朗大波尔教堂的教士。这个工作使得哥白尼有足够的时间来进行天文观测并思考与之有关的理论，经过数年的观测和思考，哥白尼形成了一套

关于行星运动的新理论，并写入他的经典著作《天体运行论》。这部书的第一版他于1507年就已完成，但由于担心其将触怒教会，哥白尼迟迟没有发表。这部书于1543年，即他逝世的那一年问世。

当哥白尼开始思考天文学的时候，托勒密的理论变得更为复杂了，更多的周转圆被补充进由托勒密引入的这套系统以使其满足大部分由阿拉伯人获得的不断增长的观察数据。在哥白尼时代，这套理论共需77个圆来描述太阳，月亮及当时所知的五颗行星的运动。对许多天文学家来说，这套理论就像哥白尼在他的书的序言中所说那样，达到了令人难堪的繁琐。

哥白尼研究过一些希腊著作并且确是依数学及和谐的原理设计的。和谐，要求一套更赏心悦目的理论而不是繁复冗赘的托勒密理论。在读了某些希腊作者，主要是阿里斯塔修斯（Aristarchus）的著作后，哥白尼认为或许太阳是静止不动的，地球绕太阳旋转的同时自转，他决心研究这种可能性。

哥白尼的推理的要点是他也用托勒密关于周转圆和从圆的图式（见第一章）来描述天体的运动。然而，最主要的区别是，太阳位于每个从圆的中心，而地球成了一颗在圆周上运动，同时自转的行星，他将圆（包括周转圆和从圆）的数目从地心说所需要的77个减小到34个，从而极大地简化了地心说。

更加惊人的简化成就是由开普勒（Tohannes Kepler）所取得的，这是科学史上最不可思议的事情。他的一生经历了许多个人不幸及由宗教和政治事件引起的磨难。1600年，他幸运地成为著名的天文学家布拉赫（Tycho Brahe）的助手。其时布拉赫正致力于自古希腊以来第一桩大的科学工作，即重新进行全面的天文观测，这些观测和其他由开普勒自己完成的观测对开普勒有极大的价值。布拉赫于1601年死去，开普勒接替他而成了奥地利国王鲁道夫二世（Rudolf Ⅱ，1576—1612年在位）王宫中的王室数学家。

开普勒的科学推理令人叹为观止，像哥白尼一样，开普勒也是个神秘工作者，他相信上帝在设计世界时，遵循了某个简单、优美的数学方案，在他的著作《宇宙的秘密》（1596年）中他说上帝

头脑中的数学和谐性解释了“为什么天体运动的轨道、大小和数目是这样而不是那样。”这种信念占据了他的全部思维。但开普勒也具备我们今天归于学者才有的那种品质，即近乎冷酷的理性化。他丰富的想象产生了新理论体系的概念，但开普勒明白理论必须与观察结果相一致，到了晚年他更清楚地意识到正是从经验资料提出了科学的基本原则，开普勒因此甘心放弃他最心爱的数学假设，一旦看到这种假设和观测数据不一致，他就以难以置信的固执拒绝容忍任一位当时学者都会忽略的偏差。这导致他可以赞成极端的科学思想。开普勒拥有谦逊，坚忍和毅力等诸多品性，正是这些品性帮助伟人们去成就他们非凡的事业。

开普勒确信存在自然的数学规律，这些规律的追求使他在错误的道路上探索了多年。在《神秘的宇宙》一书的序言中，他说：“我企图去证明上帝在创造宇宙并且 安排宇宙的次序时，看到了从毕达哥拉斯和柏拉图时代起就为人们熟知的五种几何正多面体，他按照这些形体安排了天体的数目，它们的比例和它们运动间的关系。”但是，以五个正多面体为基础建立起来的理论所推出的结论与观测的结果不一致，他花了极大的努力以改进了的形式去运用它，但最后还是放弃了这种方法。

然而，他在后来努力寻找和谐的数学关系时，却取得了极大的成功，他最著名也是最重要的成果就是我们今天所说的开普勒行星运动三定律。前两条定律公布在他 1609 年出版的一本书里，这本书有一个很长的名字，通常取其前部分，称为《新天文学》或取其后部分，称为《论火星的运动》。第一条定律尤为著名，因为开普勒打破了两千多年来的传统，即必须用圆或球来描述天体运动。毋须借助于托勒密和哥白尼用来描述行星运动的周转圆和从圆，开普勒发现只须一个椭圆足矣。其声称，每颗行星都沿着椭圆轨道运行，太阳位于这些椭圆轨道的公共焦点上（见图 2.1），而另一个焦点只是一个数学点，什么也没有。这条定律使得理解行星运动轨道更加容易因而极富价值。当然，开普勒像哥白尼一样，他指出，地球在绕其椭圆形轨道运行同时也在自转。

但欲使天文学有实际用处的话，它必须再进一步，它必须告诉我们怎样预言行星的位置。如果一个人通过观测得知行星处于一个特殊点，比如说，在图 2.1 中的 P 点，他可能想知道什么时候，比方说，夏至、冬至或春分、秋分时这颗行星会位于什么位置，人们所关心的是行星以多大的速度绕它们的轨道运行。

在这里，开普勒也迈出了极为大胆的一步，哥白尼和希腊人一直用的是匀速，即行星沿着它的周转圆运动等时间内扫过相同的弧度，同时，每个周转圆的中心又在另一个周转圆或从圆上作匀速运动，但是开普勒的观测结果告诉他，行星并不以匀速绕其椭圆形轨道运动。一个艰苦而漫长的寻找速度规律的工作以胜利而告终。他发现，如果行星在一个月内从 P 点移到 Q 点（图 2.2），比如说，也是一个月内，从 P' 点到 Q' 点，则面积 PSQ 与面积 $P'SQ'$ 相等。由于 P 点距太阳较 P' 点近，如果面积 PSQ 与面积 $P'SQ'$ 相同，弧 PQ 必须优于弧 $P'Q'$，因此，行星并不是以匀速运动，事实上，它们靠近太阳时运动得快一些。



图 2.1 每颗行星都围绕太阳以椭圆形轨道运行

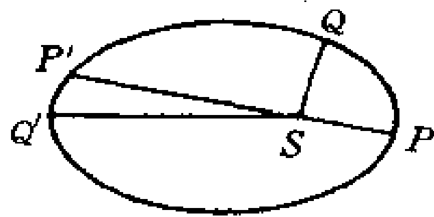


图 2.2

开普勒为他发现了第二定律而欣喜若狂，尽管它没有简单到像匀速运动定律那样好用，却证实了他最基本的信念，即上帝是依据数学原理来设计世界的。上帝所选择的可能更为微妙，但数学定律却能清楚地指明行星运动的速度大小。

还有一个重要问题没有解决，从太阳到行星的距离是依照哪一个定律来描述？问题的复杂性在于从行星到太阳的距离不是固定的，因此开普勒想找出一个新的能反映这一情形的原理，开普勒深信，自然界的设计不仅是基于数学原理，而且还基于和谐原

理，他认为“和谐”这个词在这里非常贴切。他相信存在关于天体的音乐，其能产生和谐的旋律效果，不是通过耳朵，而是通过将行星运动的事实转译成音符而辨别出来。开普勒遵循这样的思想，即把数学性与音乐性奇妙地结合在一起。他得出，如果 T 是行星的公转周期，而 D 是其与太阳的平均距离，那么

$$T^2=KD^3$$

此处 K 对于所有行星都是一个常数，这就是开普勒在《世界的和谐》（1619 年）中得意洋洋地宣布的行星运动第三定律。

然后，开普勒对上帝大唱赞歌：“太阳、月亮和群星，用你们无法表达的语言赞颂上帝吧！天上的和谐，你应当理解上帝神奇的创造，给它唱赞歌吧！我的灵魂，你赞美造物主吧！造物主创造了一切，一切又存在于造物主之中，我们最了解造物主和我们虚幻的科学所创造的东西！”

哥白尼和开普勒坚信上帝和谐、简单地设计了世界的程度可以通过他们必须反驳的异议来判断。其他行星按照托勒密理论运动，可以用希腊人的学说这样解释：这些行星是由特殊的很轻的物质所组成，因而很容易运动，但是怎样才能使很重的地球运动呢？哥白尼和开普勒都不能回答这个问题，还有一种反对地球转动的观点认为：如果地球在旋转，那么，地球表面的物体会飞到宇宙中去，就像物体从旋转着的平台掉下来一样。没有人能反驳这种观点。对于更进一步的反对意见，旋转的地球会飞散，哥白尼软弱地反驳说，地球的运动是自然的，因而不会毁掉它自己。然后他反问道，为什么天空不会因为昼夜不停的飞速运转（地心说理论认为的）而飞散？还有另外一种反对意见：如果地球由西向东旋转，那么抛向空中的物体就会坠落于原来位置的西边，因为当地球运动时物体还在空中。更进一步，地球围绕太阳旋转，既然物体的速度与其重量成正比，至少如同希腊人和文艺复兴时期的物理学所认为的那样，那么地球上较轻的物体应留在后边，甚至空气也应留在后边。对这最后一个问题，哥白尼解释说：空气具有“地球性”，所以其富有同情心地跟着地球运动。所有这些反

对意见的实质在于：地球的自转与公转不符合在哥白尼和开普勒时代被普遍接受的亚里士多德运动理论。

一类反对日心说的科学异议来自天文学本身，尤以基于下列事实的为甚：日心说把恒星视为固定不动，然而，地球在六个月时间内要在空中变换它的位置约 186，000，000 英里，因此，如果人在某一时间内看到某颗恒星并且在六个月后又看到它，则视差应该可以被观测到，然而在哥白尼和开普勒时代这却做不到。哥白尼争辩说，恒星离我们是如此之远以至于视差太小而难以被观测到。他的解释不能使批评者信服，他们反驳说：如果恒星真的那么遥远，那么它们就根本不会被清楚地看到。在这个问题上，哥白尼的回答是正确的，即使是离我们最近的恒星，在六个月内它的视差也只有 0.31 秒，这是由数学家贝塞尔于 1838 年首次观测到的，当时，他有一架高级望远镜。

传统主义者又进一步问道，根据新天文学，地球以每秒约 18 英里的速度绕太阳转动并以每秒约 0.3 英里的速度自转，为什么我们却没有感到任何运动呢？事实上我们的感觉告诉我们是太阳在天空运动，对于开普勒时代的人来说，这样的论证是无可辩驳的，所有这些对地球是在运动的科学异议都很有份量，并且不能视为拒绝接受真理的顽固守旧势力而不予考虑。

哥白尼和开普勒都很虔诚，但他们都否定了基督教的一条核心教义，即人是宇宙的中心，上帝主要关心的是人。把太阳置于宇宙的中心，这就威胁了这个慰藉人类的教义，因为它使得人成为可能有的一大群漂泊于寒冷天空的流浪者之一，他不像是为了生前享受荣华富贵，死后荣登天堂，更不像是上帝施恩的对象。哥白尼抨击地球是宇宙中心的说法，他指出，宇宙是如此巨大以至于去谈论其中心是毫无意义的，但是这种逆耳之声在当时影响甚微。

反驳所有反对日心说的意见，哥白尼和开普勒都只用了一个无以辩驳的回答，他们都使得自己的理论臻于数学的理论，更显得和谐，优雅。考虑到上帝设计了宇宙并且显然会采用更优秀的

理论，那么日心说就一定是正确的。

对他们所发现的，并认为是正确的理论，在哥白尼的《天体运行论》及开普勒的许多著作中都有毋庸置疑的证明。比方开普勒，评价他的椭圆运动理论时说："我从内心深处感觉到这个理论的真实性，我以难以置信的欣喜之情欣赏它的美妙。"开普勒1619年发表的著作，就取名为《世界的和谐》，其中洋溢着他对上帝不尽的赞颂，表达了对上帝辉煌的数学设计的钦佩之情，也表示了他自己对此坚信不疑。

起初只有数学家支持新理论是不足为奇的。因为只有那些确信宇宙数学化并且简单化地设计的数学家才具备坚定的信心去蔑视那些盛行的哲学上的，宗教上的和科学上的异议，而欣赏这种革命性的天文学数学。只有对数学在设计宇宙中的重要性坚信不移的人才有勇气去面对强大的反对力量而证实一种新理论。

对新理论的支持来自于一个意想不到的发展。早在17世纪，望远镜就被发明出来，伽利略听说了这项发明之后马上自己建造了一架，然后用于天体观测，这令他的同时代人大为震惊。他看到了木星的四颗卫星（我们现在能看到12颗），这一发现表明，每个行星都可以有卫星，伽利略还观察到月亮粗糙的表面及山峰，他还观察到太阳和围绕土星赤道的一条隆起带（现在我们称之为土星光环）。他的发现进一步证实：行星都同地球相像，它们肯定不是像希腊人和中世纪的思想家所认为的由轻飘飘的物质所构成的理想球体。用望远镜可以发现原先在天空中像一条宽宽的光带的银河是由无数颗恒星组成，因此天空中还含有其他的太阳，也许还有其他的行星系。哥白尼预言，假如人类的视力更锐利一些，我们就能观测到金星和水星的相位，就像我们能用肉眼看出月球的相位一样。借助望远镜伽利略确实观测到了金星的相位，他的观测结果使他确信哥白尼的理论是正确的，而且他在其经典著作《关于两大世界体系的对话》（1632年）中竭力为之辩护。日心说之所以被接受还由于其使得天文学家、地理学家及航海家计算起来更为简便。到17世纪中叶，科学界也愿意在日心说的基础上继

续发展，而数学法则对真理的要求也得到了极大的加强。

坚持地球既围绕太阳旋转同时又自转的学说在17世纪早期的理性氛围中绝不是偶然的。伽利略被罗马天主教宗教法庭审判早已众所周知，虔诚的天主教徒帕斯卡发现自己的著作被列入禁书之列，因为他不知天高地厚地诋毁基督耶稣，在他的《致外省人书》中，帕斯卡声称："对于伽利略的地动学说，即使你得到了罗马教廷否定伽利略的判决也是徒劳的，因为这并不能说明地球是静止不动的……。"

哥白尼和开普勒毫无疑问地接受了希腊人关于自然是按数学设计的信念及天主教关于上帝创造和设计了宇宙的信条。笛卡尔（René Descartes）着手建立系统的、清晰的和有说服力的新科学哲学。尽管笛卡尔被誉为数学王冠上的明珠之一，但他首先是一个哲学家，其次是宇宙学家，第三是物理学家，第四是生物学家，第五才是数学家。他的哲学极为重要，因为它主宰了17世纪人们的思想甚至影响到牛顿和莱布尼茨这样的巨人，他的基本目标是要找到在所有领域内建立真理的方法，这贯穿了他的基本著作《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》（1637年，简称《方法论》）。

通过只接受那些确凿无疑的事实，笛卡尔开始他的哲学体系的建立工作。那么他是怎么区分哪些是可接受的论据，哪些是不可接受的呢？在他的《思维指导法则》中（写于1628年，但他死后才得以出版），他指出："对于我们要研究的对象来说，我们不仅不应该研究他人已经想出的，而且也不应研究我们自己臆测的东西，而应研究我们能清楚明了的看出或可靠地演绎出的东西，因为知识不可能用别的方法得到。"使头脑有能力直接获得清楚和明晰的基本原理，极其敏锐的直觉和对结果的演绎——这就是笛卡尔认识哲学的实质。笛尔卡认为思维只有两种方法，它们能使得我们不必担心陷入谬误而获得知识，这就是：直觉和演绎。在《法则》一书中，笛卡尔对直觉给予很高的评价："直觉是纯粹的专注的思维的可靠概念，它仅由理性之光产生，而且比演绎更可

信一些。”

在《方法论》一书中，他证实了思想的存在以及由思想包含的确切无疑的知识，通过他的基本的直觉，笛卡尔在《方法论》一书中匆忙地证实了上帝的存在。而且后来在围绕着循环推理的争论中，他自己确信，直觉和演绎的方法一定是正确的，因为上帝不会欺骗我们。他说，“上帝是永恒的，不可改变的，独立自主的，全知的和全能的，并且包括我自己在内的万物都是上帝创造的。”

对于数学本身的真理来说，就像他在《哲学原理》(1641年)一书中指出的那样“对于属于算术和几何以及一般的纯抽象数学的图形、数字以及其他一些符号来说，我认为它们是最可靠的真理，对此我感觉得一清二楚。”“自从数学家从最容易的和最简单的东西开始研究后，只有他们才能找到确知的真理及相关的事实。”数学的概念和真理并不是由人们从感觉得来的，它们自从我们出生就深藏于我们思想之中了，这是上帝安排的，对一般三角形的感性认识永远也不会使人联想起理想三角形的概念。同样对心智很清楚的人来说，三角形的内角和一定是180°。

笛卡尔下一步将目光对准现实世界，他说，对于清清楚楚的直觉以及由之而来的演绎法，我们可以放心地将它们应用到现实中去。他认为上帝是按数学设计世界的，在他的《方法论》中，他证实了可靠真理及观念的存在，前者是上帝在自然界中建立起来的，而后者扎根于我们灵魂之中，一旦我们对它们有足够多的思考，将不再怀疑它们可以在世界上所存在和发生的万事万物中精确地观测到。

笛卡尔进一步证实自然法则是永恒不变的，因为它们是并且仅仅是预定的数学模型的一部分。甚至就在出版他的《方法论》以前，笛卡尔在1630年4月15日给一位与数学家过从甚密的神学家梅森(Marin Mersenne)的信中写道：

> 对于到处宣扬是上帝在自然界建立了这些原则不要害怕，这就像一个最高统治者在他的国家建立法律一样……。而且这就像一个国王，当他不被他

> 的臣民所知的时候更加具有威信一样，我们把国王的伟大看成不可思议时，我们并没有想到我们根本就没有国王。一个人会告诉你如果上帝建立这些真理，他也可以像国王改变他的法律一样来变更他们。对此，人们可能回答到这有可能，只要他的意愿可以改变，但我认为这些真理是永恒不变的，这也同我认为上帝是永恒的一样。

这里笛卡尔否认了通行的信念：上帝在不断地干预宇宙的活动。

对于研究客观世界，笛卡尔希望只需数学，就像他在《方法论》中所说的，“迄今为止在所有探求真理的人中，只有数学家成功地进行任何一种证明，即进行明白无误的，确定无疑的推理。”在研究客观世界时，笛卡尔相信数学足够了，他在《哲学原理》中（1644年）写到：

> 我坦率承认，在现实物质中，我还不知道有什么其他的物质存在……除了几何学家用数值给它记上符号并且作为其论证的对象的那种物质。对于这种物质，我只考虑分界线、形状以及变化。简言之，除了可以由那些普通信条（它们的正确性毋庸置疑）用在数学证明中所推出的以外，我不相信任何事。而且到现在，通过这种方法我们可以解释自然界的一切现象……我不认为我们还可以承认什么其他的客观原理，或者说我们还有理由再寻找其他任何一条。

笛卡尔在他的《哲学原理》中明确指出科学的实质就是数学，他说他“既不承认也不希望在物理学中还有除了几何上的或抽象数学中以外的什么原理，因为这样才能使所有自然现象都可解释并且可给出确定的证明。”客观世界就是一个静止不动的空间，它具体体现在几何学中，因而其性质可从几何的基本原理中得出（因为那时数学的大部分都是几何学，因而笛卡尔和他的同代人都将几何看成数学的同义词）。

笛卡尔力图解释为什么世界可用数学来解释。他坚持认为物质最基本最可靠的性质就是形状、延展性和在时空中的运动，而所有这些都是可用数学描述的。由于形状可归结为延展，笛卡尔宣称："如果给我延展和运动，我就能构造宇宙。"他特别强调所有物理现象都是受外力作用的分子机械运动的结果，然而作用力同样也满足不变的数学规律。

既然笛卡尔认为外部世界只是由运动的物质组成，那么他怎么解释味觉、气味、颜色以及音质呢？在这些问题上他援引古希腊人的信条，即德谟克里特的第一性和第二性学说。第一性，物质与运动，存在于客观世界中；第二性，包括味觉，气味、颜色、热、声音的悦耳或刺耳，不过是外界原子与感官互撞时由人们感官中的第一性产生的结果。现实世界是在时空中可用数学描述的物体运动总和，整个宇宙是通过数学原理建立起来的庞大的、和谐的机器，科学以及事实上任何用来建立顺序和测量的原理都可归于数学。他在《思维的指导法则》第四法则中写道：

> 所有那些目的在于研究秩序和度量的科学，都与数学有关。至于所求的度量是关于数、形、星体、声音或是其他东西都无关紧要。因此，应该存在一门普遍的科学，去解释所有我们能够知道的秩序和度量，而不必考虑他们在某个特殊学科中的应用。事实上，通过长期使用，这门科学已经有了其专门的名称，这就是数学。……其所以在灵活性和重要性上远远超过那些依赖于它的科学，是因为它完全包括了这些科学的研究对象和许许多多别的东西。

笛卡尔对数学本身并没有提出什么新定理，但他却提供了一种非常有效的研究方法，即我们现在所称的解析几何（见第五章），从技术的观点来看，解析几何彻底改变了数学研究方法。

在科学上，笛卡尔的贡献，虽然不如像哥白尼、开普勒以及牛顿那样辉煌灿烂，但也不容轻视。他的漩涡理论（见第三章）是17世纪时的主要宇宙学理论，他是机械论哲学的奠基人。这种哲

学认为，所有自然现象，包括人体的作用，但除了灵魂，都可归结为服从力学定律的运动。对于力学来说，他系统地阐述了惯性定律，即现在所说的牛顿第一运动定律：如果没有外力作用，每个物体都保持其静止状态或匀速直线运动状态。

光学，特别是透镜设计，是笛卡尔另一个主要兴趣所在，实际上他的《几何学》一部分和《屈光学》的全部（《方法论》后面的附录）都是讲光学的。他和斯涅耳共同发现了光的折射定律，即光在媒质中传播时，媒质突然变化（如光从空气射到玻璃或水）时光线如何变化。希腊人开始将光学数学化，但笛卡尔的贡献在于他把光学发展成为数学科学。在其他领域他也做出重要贡献，包括地理学、气象学、植物学、解剖学（动物解剖）、动物学、心理学、甚至医学。

尽管笛卡尔的哲学和科学观点背离亚里士多德主义及中世纪的经院哲学，但在一个基本的方面，他还是一个经院主义者：他从自己的心里得出关于存在和实在的本质命题，他相信有先验的真理，而理智本身的力量可以得到对一切事物的完整知识。这样，他在先验推理的基础上阐明运动定律（实际上他在生物学及其他一些领域的研究中作了一些实验，并且从中得出一些重要的结论）。然而，通过把自然现象归结为纯物理现象，他做了许多努力去剔除科学中的神秘主义和超自然力。

17 世纪伟大数学家之一，帕斯卡（Blaise Pascal）毫不怀疑科学中的数学及数学规律是真理。和笛卡尔不同，笛卡尔认为直觉明显地可以被头脑接受，帕斯卡则认为直觉只可以被内心所接受。真理必须是清晰地出现或在心里确定无疑，或者是这类真理的逻辑推论，在他的《思想录》里，他告诉我们：

> 关于空间，时间、运动和数的基本原理的知识如同我们通过推理获得的任何知识一样可信，事实上，由我们内心和直觉所提供的这种知识正是我们的推理赖以建立结论的基础。对推理来说，要求在接受来自内心的基本原理前就要求其证明是无意义

> 的和荒谬的，就如同对内心来说，在接受由推理所论证的所有命题前就要求其有直观知识一样是无意义和荒谬的。

对帕斯卡来说，科学就是研究上帝的世界，他认为单纯为了娱乐来从事科学工作是错误的。以娱乐为主要目的而搞研究是糟蹋了研究，因为那种人抱有“一种对学问的不尽贪欲，对知识的恣意挥霍。”“这种对科学的研究出自于对自我为中心的关心，而不是着眼于在周围的自然现象中找出神的存在和光辉。”

在开创现代数学和科学，富有独创精神的思想家中，伽利略与笛卡尔齐名，当然，他也相信自然界是上帝按数学设计的。他在1610年《试金者》中的论述非常著名：

> 哲学（自然）被写在那部永远在我们眼前打开看的大书上，我指的是宇宙。但只有首先学会它的语言，把握了它的书写符号以后，我们才能理解它。它是用数学语言写成的，符号是三角形，圆以及其他几何图形，没有它们的帮助，人们一个字也读不懂，没有它们，人们就只能在黑暗的迷宫中游荡。

自然界是简单而有序的，它的行为是规则的而且是必要的，它依照完美并且不变的数学规律运动，神圣的推理是自然界中理性的源泉，上帝把严格的数学必要性置于世界，即使人的推理与上帝有关，人也只有通过艰苦努力才能领悟这种数学必然性。因此，数学知识不仅是绝对真理而且像《圣经》那样，每句每行都不可侵犯，更进一步，研究自然就得像研究《圣经》一样虔诚。“上帝在自然行为中所呈现给我们的，一点不比其在《圣经》中用神圣的字句所表示的逊色。”

伽利略在《关于两大世界体系的对话》（1632年）中断言：在数学中，人类达到了所有可能的知识的顶峰，这一点他并不比那位神圣的智者逊色。当然，后者知道的和感觉到的数学真理远远比人知道的多，但考虑到客观确定性，少数被人掌握的真理与上帝所知道的一样完善。

尽管伽利略是个数学教授而且是宫廷数学家，他的主要贡献是他在科学方法上的许多变革，其中，最著名的就是他的废除物理解释的主张——亚里士多德奉为科学的真正目标——而应去寻求数学描述。这两种目标的不同易于说明：一个物体落到地面，并且，事实上是以逐渐增加的速度下落的，亚里士多德及信奉他的方法论的中世纪科学家则力图解释引起它下落的原因，并假设是力学方面的。伽利略正相反，他仅用数学法则来描述下落，用现代数学记号来表述就是$d=16t^2$，这里d指在t秒内物体下落的英尺数。这个公式一点也没说物体为什么下落，而且与人们想知道的有关这种现象的事更是风马牛不相及。然而伽利略确信我们要探寻的自然知识是可描述的。他在《两类新科学》中写到："有关下落物体加速运动的原因并不是必然要研究的部分。"更一般的，他指出，他要研究和证明的是一些运动的性质而不考虑为什么会这样。正确的科学探索同所谓的寻求最后原因之类的问题要分别开来，而且物理原因的假设应该放弃。伽利略坚持向自然科学家提议：不要研究为什么会这样，而要讨论怎样定量描述。

对伽利略的这个方案的核心的第一反应即使在今天也许也是否定的，用公式来描述现象只能说是第一步，亚里士多德派好像实际上已掌握了科学的真正作用，这就是解释这些现象为什么会发生。即使笛卡尔也抗议伽利略的寻找描述性公式的决定，他说："伽利略关于真空中落体所说的一切都是缺乏根据的，他应该首先确定重量的本质。"更进一步，笛卡尔说，伽利略应该思考终极原因。依照后来的发展，现在我们知道，伽利略追求描写的决定是关于科学方法论最深刻最有成效的变革。它的重要性，以后会更明显，就在于把科学置于数学的保护之下。

伽利略的另一个原则就是科学的任一分支都可用数学模型模仿出来，两个基本步骤是，数学从公理即不证自明的真理出发，通过推理建立新定理。所以，任一科学分支都应由公理或原理出发进行推理。更进一步讲，人们应该从公理中尽可能多地推出结论。当然这个原则是亚里士多德提出的，其目的在于用头脑中的数学

模型推出科学的推理结构。

然而，伽利略与希腊人、中世纪思想家和笛卡尔在获取基本原理的方法上截然不同。伽利略以前的人及笛卡尔相信基本原理出自心中，心只须对任何一类现象加以思考，就能得出基本真理。心的这种力量在数学中得到明证，像等量加等量结果仍相等，两点决定一条直线等公理，只要一想到数和几何图形，就会立刻呈现出来，而且是毋庸置疑的真理。希腊人也确曾找出一些自明的物理原理，例如“宇宙中所有物体都应有自然位置”这条原理再恰当不过了。静止状态看起来显然比运动状态更自然，欲推动一个物体且使其保持运动，则必须用力，这似乎也是无可辩驳的。相信心能够提供基本原理，并不否认观测能帮助我们获得这些原理，但是观测只能唤起正确的原理。正如看见一个熟悉的面孔，就能想起有关那个人的事情一样。

这些学者就像伽利略所说的，是首先决定世界怎样依照他们预定的原理运作。伽利略认为，在物理学中，与在数学中相反，基本原理必须来源于经验和实验，获取正确基本的原理的方法应是注意自然说了什么而不是我们想了什么。他公开批评那些接受大自然怎样运作符合他们预定原理的规律的科学家和哲学家，他说，自然界并不是首先造出人的大脑，然后再安排世界以便使之可为人的智力所接受。中世纪的思想家喋喋不休地重复亚里士多德的话并且争论它的含义，伽利略批评说，知识来自观测，不是来自书本，关于亚里士多德的争论是无用的。对于沉湎于把科学看成是研究《伊利亚特》及《奥德赛》或者是诠释希腊人著作的人，伽利略称他们是纸上科学家。他说：“当我们得到自然界的意志时，权威是没有意义的。”

当然，一些文艺复兴时期思想家及伽利略的同代人弗朗西斯·培根也得出了实验是必要的结论。在他的新方法上，伽利略并不超出他人，但是，笛卡尔却认为伽利略依赖于实验的办法是不明智的。笛卡尔认为感觉只能导致幻觉，理性才能洞察幻觉。从心智所提供的天生的一般原理，我们能推出自然界的特殊现象并

且理解它们。确实，如同我们前面提到的，在笛卡尔许多科学工作中，笛卡尔做了实验而且要求理论符合事实，但在他的哲学里他仍然依赖内心的真理。

少数数学物理学家同意伽利略的观点，即靠推理并不能确保物理原理的正确性。基督教徒惠更斯实际上批评过笛卡尔，英国物理学家也抨击过纯理性主义。胡克（Robert Hooke）说，伦敦皇家学会的成员们“面临着这么多致命的错例，这些错例，使人类的大多数人都为之迷惑，因为他们仅仅依赖于推理的力量。而现在，会员们已开始凭感性来校正所有的假设了。”

当然伽利略意识到靠一条不正确的由实验得出的原理，推出的结果也是不正确的，因此，他建议并且可能做了一些实验来检验他推理的结论以获得基本原理，然而，伽利略做实验做到何种程度却不得而知。有一些他称之为实验的，实际上是理想中的实验，即想象如果真做实验的话，一定会发生什么。然而，他的宗旨：物理学原理必须建立在经验及实验基础上却具有革命性的关键意义。伽利略毫不怀疑一些上帝用来创造宇宙的真实原理可从心里推出，但在从经验出发的角度上，他允许对此持怀疑态度。如果科学的基本原理必须来源于实践，数学公理为什么不行呢？这个问题在1800年以前对伽利略及他的后人都没引起什么麻烦，数学仍然是一门特权学科。

在他的科学著作中，伽利略聚焦于物质和运动，他清楚地并独立地认识到笛卡尔的惯性原理，即现在所说的牛顿第一运动定律。他也成功地获得作垂直运动、沿斜面运动物体及抛射体运动的规律，他证明抛射体运动轨迹为抛物线。总之，他获得了所有地上物体的运动规律。尽管，在任何一项重大的变革中，都可以找到一些前人的足迹，但还没有人能够像伽利略那样清楚地通晓指导科学研究的概念及原理，而且，没有人像他那样用简单而有效的方式证明了它们的应用。

由于伽利略的对他的时代的重大创新，他的哲学和科学方法论成为牛顿伟绩的开端，后者出生在伽利略逝世的那年。

第三章 科学的数学化

在任何特定的理论中，只有其中包含数学的部分才是真正的科学。

——康德

科学中的数学定律是真理，体现在上帝对宇宙的设计之中，如果这个信念还须加强，那么它已由艾萨克·牛顿爵士极好地完成。牛顿是剑桥大学的数学教授，被称为最伟大的数学家之一，他还被誉为一个物理学家。他的工作提供了一整套新的科学方法，开创了科学的一个新纪元，并因之加强和深化了数学的作用。

哥白尼、开普勒、笛卡尔、伽利略、帕斯卡都证明了自然界的一些现象与数学定律相吻合。他们深信上帝不仅创造了世界，而且其创造与人的数学思维相一致。统治17世纪的哲学或科学方法论由笛卡尔系统地阐述和发展，笛卡尔甚至认为全部物理学都可以归结为几何学。几何学这个词被他和其他人常常用作数学的同义词。笛卡尔的方法论被大多数牛顿时代以前的人所采纳，尤其

是惠更斯，后者认为，科学具有另外一种附加的功能，即提供一个自然现象的物理解释。

希腊人，尤其是亚里士多德，也用物理学术语来解释自然现象的行为。他们的主要理论是，所有的物质是由四种元素：土、气、火和水组成，它们具有一种或多种性质，重性、浮性、干性和湿性。这些性质可解释物体的表现：火向上燃烧是因为火轻，而土质的物质向下落是因为它具有重量。对于这些性质，中世纪的学者们还增加了其他许多性质，如共振和不相容。共振解释了一个物体相对于另一个物体，如铁对磁石的吸引。不相容则解释了一个物体被另一物体所排斥。

另一方面，笛卡尔却摈弃了所有这些性质，坚持认为所有物理现象都能由物质和运动来解释。物质的这些基本属性具有广延性，并且可以度量，因此可以归结为数学。再进一步，由于没有物质，也就没有广延性，因此真空是不可能的。空间充满着物质，并且物质只可能由于直接接触而相互作用。然而，物质是由大小、形状和其他特征各异的不可见颗粒所构成的，正是因为这些颗粒小得不可见，所以有必要对它们的行为作一些假设，以解释人们可以观察得到的大的现象。依据这个观点，空间充满了微粒，它们可以推动更大的物体，如行星绕太阳旋转。这也就是笛卡尔的漩涡理论的精髓所在。

笛卡尔是机械唯物主义的奠基人。法国哲学家，基督教士伽桑狄（Pierre Gassendi），英国哲学家霍布斯（Thomas Hobbes）和荷兰数学家与物理学家惠更斯（Christian Huygens）继承了他的学说。惠更斯在他的《光论》（1690年）一书中，假设空气中充满能传递光的运动的以太微粒，从而解释了光的各种现象。事实上这本书的副标题就是：对反射和折射发生原因的解释。在绪论中，惠更斯认为，在真正的哲学中，“人们构想所有自然界作用的原因是机械运动，因此，依我的观点，我们或者是搞清楚所有的物理现象，或者是放弃这一希望。”但另一方面伽桑狄却坚信，原子是在真空中运动。

物理学有关微粒作用的假设确实，至少在大体上，解释了自然界的总体行为。但这些都是心智的创作，而且笛卡尔和他的追随者们的物理学假设是定性的，因此也就仅能解释而已，而不能精确地预言观察和实验中所出现的现象。莱布尼茨称这种物理学假设为一个美丽的神话。

一种关于科学的，与上述哲学完全相反的哲学由伽利略所开创。科学必须寻求数学描述而不是物理学解释，而且，基本理论应由实验和根据对实验的归纳而得出。根据这种哲学，同时受他的老师巴罗的影响，牛顿改变了科学研究的程序。他采用数学前提来取代物理学假设，从而使预言具有培根所倡导的确定性，而这些前提是由实验和观察得来的。

伽利略先于牛顿探讨了物体的下落和抛物体的飞行，牛顿却解答了一个更为深广的问题，一个 1650 年左右在科学家们脑海中占据最主要地位的问题：能否在伽利略的地上物体运动定律和开普勒的天体运动定律之间建立一种联系？所有运动现象都应遵循一套定律，这种想法似乎有点过于自信和不凡，但确实在 17 世纪严谨的数学家们的头脑中很自然地产生了。上帝设计了宇宙，因此可以推测所有的自然现象都遵循一个总的规划，上帝极可能用一套基本原理来支配相联的事物。对于 17 世纪致力于揭示上帝的自然设计的数学家和科学家来说，合乎情理的做法似乎应该是去寻求控制各种地面物体运动和天体运动的统一规律。

在实施他推导宇宙运动规律的计划的过程中，牛顿对代数、几何、尤其是微积分（见第六章）做出了许多贡献，而这些仅仅是为达到其科学目标的辅助工作。事实上，牛顿认为数学是枯燥和乏味的，只是表述自然定律的一种工具。他致力于寻找能导出一个统一地上物体运动和天体运动的定律的科学原理，幸运的是，正如狄德罗所说的，自然界把秘密告诉了牛顿。

牛顿当然熟悉由伽利略建立起来的定律，但这些还不够。由运动学第一定律可以很清楚地知道，行星受一个被吸往太阳的力，如果没有这个力，每一颗行星将作直线运动。总是有一个力将行

星拉向太阳的想法许多人都有过。哥白尼、开普勒、著名实验物理学家胡克、物理学家和著名建筑学家雷恩(Christopher Wren)、天文学家哈雷(Edmund Halley)以及其他一些人，甚至在牛顿之前就开始了探索的工作。而且有人推想，这种力对一个较远星球的作用必定比对较近星球的要弱，而且随着太阳与星球的距离的增大，力成平方反比减小。然而在牛顿的工作以前，这些有关引力的想法都没有推进到能超过观测结果。

牛顿吸收了他的同时代人所作出的推想，即在任何两个质量为 m 和 M，相距为 r 的物体之间的引力 F，可由以下公式

$$F=G\frac{mM}{r^2}$$

给出。在这个公式中，G 是常量，即无论 m、M 和 r 为何值，它都不变。这个常量的值取决于所用的质量、力及距离的单位。牛顿还将伽利略的地上物体运动定律进行普遍推广，这些推广现在称之为牛顿运动三定律。其中第一定律已由笛卡尔和伽利略所导出：如果一个物体不受力，它将保持静止或做匀速直线运动；第二定律说：如果一个力作用在一个质量为 m 的物体上，那么它将给此物体一个加速度，准确一点说，这个力等于质量与加速度的乘积，用公式表示即 $F=ma$；第三定律则认为：如果物体 A 给 B 一个作用力 F，那么 B 给 A 一个大小相等、方向相反的作用力 F。由这三个定律及万有引力定律，牛顿可以很容易地推断地球上所有物体的运动规律。

就天体运动来说，牛顿真正的成就在于他证明了开普勒经过多年观测和研究得出的开普勒三定律可以由万有引力定律和运动三定律用数学方法推导出来。在牛顿以前关于行星运动定律的研究工作，曾被认为与地面物体运动无关，现在的结果则表明行星运动遵循与地面物体运动同样的规律。从这种意义上说，牛顿解释了行星运动规律。此外，由于从万有引力定律所推导出来的开普勒定律与观测结果十分吻合，也为万有引力定律的正确性提供了强有力的证据。

用运动定律和万有引力定律所推导出来的这些结果只是牛顿所完成的工作的一小部分。他应用万有引力定律解释了以前一直难以解释的海洋潮汐现象，对大范围的水域来说，引力主要来自于月亮，其次是太阳。由收集到的太阴潮，即由月球所引起的潮的高度的数据，牛顿算出了月球的质量。牛顿与惠更斯计算了地球沿着赤道的隆起度，牛顿还与其他人一起说明了彗星的轨道与万有引力定律保持一致，因此可以认为彗星也是我们太阳系的一个合法成员，而不是什么突发事件或上帝派出来泄怒降灾的天外来客。牛顿接着说明了月亮和太阳对地球赤道隆起带的吸引力使地球的自转轴形成一个周期大于 26000 年的锥，其不总指向天空中的同一颗星。地轴轴向的这种周期性变化使每年的春分和秋分都发生些微的变化，这一事实喜帕恰斯早在 1800 多年前就观察到了，这样牛顿就解释了岁差。

最后，牛顿用近似的方法，解决了许多有关月球运动的问题。例如，月球运动所在平面略微向地球运动平面倾斜，牛顿能够说明太阳、地球、月球三者之间的相互吸引而引起的这种现象遵循万有引力定律。牛顿和他的直接继承者们推导出了如此浩繁而又杰出的有关恒星、彗星、月球、海洋运动的结果，以至于他的成就在接下来的两百年里被誉为"世界体系的阐述"。

在所有这些工作中，牛顿采纳伽利略的提议去寻求数学描述而不是物理解释。牛顿不仅将开普勒、伽利略、惠更斯的大量实验和理论性成果融汇起来，而且将数学描述和推导置于所有科学描述和预言之前。在他巧妙地命名为《自然哲学的数学原理》(1687年）一书的序言中，他写道：

> 古人（如帕普斯所告诉我们的）认为在研究自然事物时，力学最为重要，而今人们则舍弃其实体化的形式和深藏的实质，而力图以数学定律说明自然现象。我在本书中致力于用数学来探讨有关的哲学问题。……因此我把这部著作称为哲学的数学原理，因为哲学的全部任务就在于从各种运动现象来

> 研究各种自然之力，而后用这些力去推证其他现象。本书第一、第二编中的一些普遍命题就是为了这个目的而提出来的。……然后根据其他同样是数学上论证过的命题，从这些力中推演了行星、彗星、月球和海潮的运动。

很明显，数学在这里起了主要作用。

牛顿有充分的理由强调定量的数学定律来反对物理学解释，因为在他的天体力学中，核心概念是万有引力，而万有引力的作用 根本不能用物理学术语解释。不管两个物体相距多么遥远，它们仍然相互吸引，这种万有引力的概念简直和亚里士多德派及中世纪的学者们为了解释科学现象而发明“质”的概念一样令人难以置信。这种概念尤其不能为牛顿的同时代人所接受，他们坚持力学的解释并且认为力只有在一个物体“推”另一物体时才有可能发生。这种放弃物理机制而采取数学描述的方法震撼了甚至是最伟大的科学家。惠更斯认为万有引力的想法是荒谬的，因为这种超空间的作用不属于任何一种机械运动。他对牛顿没有根据而不厌其烦地只用万有引力的数学原理作那么多繁琐的计算感到吃惊。其他许多人，包括莱布尼茨，也反对万有引力的纯数学解释。莱布尼茨自1690年读完了牛顿的《原理》后就开始抨击它直至逝世。伏尔泰（Voltaire）1727年在出席了牛顿的葬礼后，调侃牛顿把一个真空留在了伦敦，又在法国找到了一个实空（Plenum），在那儿，笛卡尔的哲学仍然盛行。为解释“超距作用”而作的努力一直持续到1900年。

即使完全没有物理学解释，而仅仅依靠数学描述，牛顿也使得他那无与伦比的贡献成为可能。作为对物理学解释的替代，牛顿确实有一个有关重力作用定量的公式，这个公式既重要又实用，因此，在他的《原理》开篇中，牛顿说：“我在此只为这些力提供一个数学的概念，并没有考虑他们的物理因果。”在书末他又重复了这种思想：

> 但是我们的目的，是要从现象中寻出这个力的

> 数量和性质，并且把我们在简单情形下发现的东西作为原理，通过数学方法，我们可以估计这些原理在较为复杂情形下的效果。……我们说通过数学方法(着重号为牛顿所加)，是为了避免关于这个力的本性或质的一切问题，这个质是我们用任何假设也确定不出来的。

在他1692年2月25日写给牧师本特利博士的信中，牛顿这样写道：

> 至于引力是物质所内在的，固有的和根本的，因而一个物体可以穿过真空超距地作用于另一个物体，毋须有任何一种东西的中间干预，用以把它们的作用和力从一个物体传递到另一个物体，这种说法对我来说，尤其荒谬。我相信凡在哲学方面有思考才能的人决不会陷入这种谬论之中。引力必然是由一个按一定规律行事的主宰所造成的，但是这个主宰是物质的还是非物质的，我留给读者自己去思考。

尽管有牛顿在数学上的成功，但物理机械论的久不出现依然困扰着科学家们，然而他们想得到这样一种物理机械论的努力一直没有实现。贝克莱(Bishop George Berkeley)在他的对话《艾西弗伦》(Alciphron，1732年)中阐述了以下观点：

> (尤弗拉洛简记为尤，艾西弗伦简记为艾)。
>
> 尤：……我请求您，艾西弗伦，不要被那些术语所迷惑，把力这个字放一边吧，把其他任何事情从你的思想里去除，然后看你对力有什么明确的见解。
>
> 艾：力是存在于能发生运动和其他可知后果的物体中的东西。
>
> 尤：那么力与那些后果是截然分开的吗？
>
> 艾：是的。

尤：那我们现在很高兴不用考虑力的主体和后果，
　　而只须考虑力本身的准确概念了。

艾：我认为事情并非如此简单。

尤：看来你我都不能用自己才智范围内的语言构造
　　一个力的概念，因为人的思维和才能如此相似，
　　那么我们可以设想其他人也不会有比我们更好
　　的想法了。

牛顿确实希望引力的本质能为人们探究和知晓，但事与愿违，没有人能解释引力是如何作用的，这种力的物理真实性从未得以证明，而只是人类能力试图影响这种力的一个科学幻想。然而，由定量定律得到的数学结论被证明是如此有效，以致于这种方法被认为是自然科学的一个整体部分。科学所做的就是牺牲物理上的可解释性而得到数学上的可描述性和可预测性。

17 世纪的成就常被概括为数学物理学家们构造了一个像机器一样运转的力学世界。当然，如果力学仅仅是指通过作用在微粒及它们的延展而成的物体上的力，用重性、浮性、共振和前面所提及的一些概念解释所产生的运动，那么，亚里士多德及中世纪的科学家们的科学也是力学。然而，17 世纪的人，尤其是笛卡尔及其追随者，摈弃了前人用以解释运动的质量多元性的假设，而将力限定为物质的、明显的：扔出一个物体必须有重量或力。可以称这种牛顿以前的物理学为物质物理学，数学可以描述它但数学不是根本。

牛顿力学和他以前的力学的本质不同不只在于引入了数学来描述物体的状态，数学对物理学的帮助也不只因为它是一种更方便、更简洁、更清晰、更普遍的语言，而是因为它提供了最基本的概念。重力只是一个数学符号的名称，同理在牛顿第二运动定律（$F=ma$，力等于质量乘以加速度）中，力可以是使物体产生加速度的任何东西。力本身的性质在物理上也许是不可知的，因此牛顿谈到而且使用了向心力和离心力的概念，尽管他并不知道这些力的机制。

在牛顿力学中甚至质量的概念也是虚构的。确切而言，质量是物质，而物质却如同塞缪尔所“证明”的像踢一块石头一样真实。对牛顿来说，质量最基本的性质是惯性，其意义已在第一运动定律中表述，即若一个物体处于静止且不受力作用时，它将继续保持静止；若它处于运动状态，则它将作匀速直线运动。为什么是直线而不是曲线呢？伽利略将惯性运动理解为曲线运动。那么，为什么会是匀速运动呢？如果没有力的作用，物体为什么总保持静止或做匀速运动？惯性是一个虚构的概念，并非实验事实，质量不可跟所有的力分开。牛顿运动定律中唯一具有物理真实性的部分是加速度，我们可以观察并度量出物体加速度的大小。

但牛顿终于放弃了物理的解释，他用数学概念及量化了的公式，还有能导致公式的数学推导重铸了整个17世纪的物理学*。牛顿的光辉业绩呈现给人类一个崭新的世界秩序，和一个用一套普遍的，仅用数学表述的物理原理控制的宇宙。这是一个包括了石头下落、海洋潮汐、行星及其卫星运动、彗星挑战性的大尾巴以及恒星辉煌庄严的运动的宏大的规划。牛顿这个规划使世人折服：自然界是依数学设计的，自然界的真正定律即数学。牛顿的《原理》是物理解释的墓志铭。拉普拉斯曾说过，牛顿是最幸运的人，因为只有一个宇宙，而他成功地发现了它的定律。

在18世纪，数学家们，同时也是伟大的科学家们继承了牛顿的想法，拉格朗日的《分析力学》（1788年）可视作是牛顿数学方法的典范。在这本书中，力学完全数学化地处理，与物理过程无甚联系。事实上，拉格朗日夸口他不需这些，甚至连几何图形也不需要。牛顿力学和天文学的方法，也被用于处理物理学一些较新的分支，如流体力学、弹性力学和电磁学。定量的、数学化的方法构成了科学的本质，真理大多存在于数学之中。

17世纪的叛逆者们借助于数学描述进行研究，发现了一个量化了的世界。他们将物理世界的具体事物转换成数学公式，从而

* 在《光学》里，牛顿确实给出了物理解释，然而其不足以解释所有的光学现象。

留给后人一个数学的、定量的世界，这就是繁荣至今的自然的数学化的开始。而当詹姆斯·琼斯爵士（James Jeans）在《神奇世界》（1930年）中称："宇宙的伟大建筑师现在看起来似乎是一个纯粹的数学家"时，他至少已落后于时代两个世纪。

虽然如我们所说，单纯依赖于不被物理解释所支持的数学公式，牛顿也颇感不安，但他不仅竭力提倡他的关于自然哲学（物理学）的数学原理，而且确信其是他所描述的现象的真正解释。他为何有这种信念呢？原因是，正如他那个时代的所有数学家和科学家一样，牛顿相信上帝创造的世界与数学原理相吻合。最具说服力的是牛顿在《光学》（1704年）中，有关上帝作为宇宙框架构造者而存在的一段经典论述：

> 自然哲学的主要任务是不作虚构假说而从现象来讨论问题，并从结果中导出其原因，直到我们找到第一个原因为止，而这原因一定不是机械的。……在几乎空无一物的地方有些什么？太阳和行星之间既无稠密物质，它们何以相互吸引？何以自然界不作徒然之事，而我们在宇宙中看到的一切秩序和美丽又从何而来？出现彗星的目的何在，并且何以行星都是一样在同心的轨道上运动，是什么在阻止一颗星下落到另一颗的上面？动物的身体怎么会造得如此巧妙，它们的各个部分各自为了哪些目的而设？没有光学的技巧，是否能造出眼睛，没有声学知识，是否能造出耳朵？身体的运动怎样依从意志的支配，而动物的本能又从何而来？……这些事情都是这样井井有条，所以从现象来看，是否好像有一位没有形体的、活的、最高智慧的、无所不在的上帝，他在无限空间中，像在他的感觉中一样，仿佛亲切地看到形形色色的事物本身，深刻地理解并全面地领会它们，因为事物就直接呈现在他的面前？

在他的《原理》第三版中，牛顿回答了他自己的问题：

> 太阳、行星和彗星这个最美丽的系统只能开始于一个有智慧、有能力的人的圣旨和支配。……这个人统治了天下万物，他不仅是世界的灵魂，而且是一切的主宰。

牛顿也确信，上帝是一个全能的数学家和物理学家。他在一封1692年12月10日给理查德·本特利的信中写道：

> 为了形成（宇宙）系统及其全部运动，就得有这样一个原因，它了解并且比较过太阳、行星和卫星等各天体中的质量以及由此确定的重力，也了解和比较过各个行星与太阳的距离，各个卫星与土星、木星和地球的距离，以及这些行星和卫星围绕这些中心体中所含的质量运转的速度。要在差别如此巨大的天体之间比较和协调所有这一切，可见那个原因决不是盲目的和偶然的，而是非常精通力学和几何学的。

科学将揭开上帝辉煌设计的秘密，牛顿在给本特利的同一信中开头如此表达自己的观点："在我撰写关于我们系统（译注：指太阳系）的著作（译注：指《原理》）时，我曾着眼于这样一些原理，用这些原理也许能使深思熟虑的人们相信上帝的存在；而当我看到它对这个目的有用时，可以说没有别的什么东西能使我更加高兴的了。"牛顿还有许多类似这样的信件。

牛顿对宗教的兴趣是他进行数学和科学研究的真正动力。他相信基督教的教义就是上帝的启示，上帝是所有自然力和万事万物存在与发生的原因，神的意志、引导、控制无所不在。从他青年时代开始，牛顿就做过严格的有关宗教方面的研究和解释工作，他的后半生也全部献给了神学。在他的著作《对丹尼尔的预言和圣约翰的启示录的观察》（1733年）和《古代王国编年史修订本》残存的数百页手稿中，他试图确定《圣经》事件年表。虽然科学研究本身就是要从神秘和超自然中解放出来，但牛顿认为科学也是崇拜上帝的一种形式。牛顿为自己的工作揭示了无所不在的上

帝之秘密而倍感欣慰。他重视加强宗教的基础远胜过重视数学和科学成就，因为后者只不过是展示了上帝对宇宙的设计而已。他经常为自己那艰难有时甚至是枯燥的工作辩护，因为这些工作通过提供上帝安排宇宙秩序的证据支持了宗教，他就像拜读《圣经》一样虔诚地工作。上帝的智慧可以通过展示宇宙的结构而被证明，上帝也是天下万事发生的原因，奇迹只是上帝常规活动之外的即兴创作。上帝偶尔也必须修正一些小纰漏，正如钟表匠修理钟表那样。

上帝设计了宇宙，数学和科学的作用是揭示这些设计，如果这一信念还须加强，那么这一工作已由莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz）来担当。像笛卡尔一样，莱布尼茨主要是个哲学家，他多才多艺，对数学、科学、历史、逻辑学、法律，外交和神学的贡献都是首屈一指的。同牛顿一样，莱布尼茨视科学为一种宗教使命，科学家们有义务去肩负之。在 1699 年或 1700 年的一封没署名日期的信中他写道："在我看来，整个人类的首要追求目标应该是理解和发展上帝所创造的奇迹，这也是上帝赐给人类地球这个帝国的原因。"

在《神正论》(1710 年) 中，莱布尼茨肯定了到那时为止这样一些类似的想法，即上帝是位伟大的智者，正是她创造了这个精心设计的世界。莱布尼茨对现实世界和数学世界的和谐，以及对数学在现实世界适用性的最终辩护是，上帝与世界是统一的，因为上帝已精心计算在先，所以世界就是如此，数学与自然之间，有一种先天的默契。宇宙是尽善尽美的，是所有可能有的世界中最美好的世界，而且是理性的思维揭示了它的规律。

真正的知识在我们头脑中是与生俱来的，尽管不是如柏拉图所说，是先验存在的。感觉永远不能教给我们诸如上帝存在，或所有直角都相等之类最起码的真理。因此，数学的公理是先天存在的真理，正如它是力学和光学等推理科学中的基本原理一样。

为了确定被感知的事物，感觉不可或缺，同样，为了确定事实，实验不可或缺。……但证明的力量在于理性的概念和真理，只有

它们能使我们识别什么是必需的。……”

莱布尼茨的数学和科学工作广泛而有价值，我们以后还将详述。但有点像笛卡尔，他的贡献是技术性的。他在微积分及微分方程创立之初所做的工作，还有他对某些新出现的概念——如我们今天称之为动能——的重要性的确认，都是第一流的。但莱布尼茨没有贡献任何新的关于自然的根本性法则，倒是他的以数学为基础的科学哲学认为，在激励人们寻求真理时，数学最为重要。

18世纪的人们极大地发展了数学和数学科学，使有知识的人确信，数学和科学中的数学定律是真理，但他们的工作大部分是前人工作的延伸。贝努利家族，尤其是詹姆斯·贝努利（James Bernoulli）、其弟约翰·贝努利（John Bernoulli）及约翰之子丹尼尔·贝努利（Daniel Beroulli），还有欧拉、达兰贝尔、拉格朗日、拉普拉斯及其他许多人继续对自然进行数学探索，他们都对微积分的技巧有所发展，并创建了一些全新的数学分支，如常微分方程、偏微分方程、微分几何、变分法、无穷级数及复变函数。这些学科本身不仅被作为真理接受，而且为探索大自然提供了更加强有力的工具。正如欧拉1741年所言：“数学的用处，通常认为是其基础部分，但数学的用处，不仅不囿于较高深的数学，而且事实上，科学越向纵深发展，数学的作用就越显著。”

数学研究的目的在于获得更多的自然规律，更深刻地了解自然的设计。为了继续牛顿描述和预言天体运动的工作，人们在天文学上所做的努力最多。牛顿的主要理论，即行星的轨迹是椭圆，只当天空中仅有太阳和一颗行星时才正确，他对此也很清楚。但在牛顿时代和几乎整个18世纪，人们已得知有6颗行星，每一颗相互吸引而所有的行星又被太阳吸引。更进一步，一些行星，如地球、木星、土星均有卫星，因此椭圆形轨道会受到干扰。那么，真正的轨道又是什么呢？所有18世纪的伟大数学家们都在考虑这个问题。

问题的关键在于三个物体之间相互有引力作用。如果能够设计某种方法以测定第三个物体的干扰作用，那么这种方法也同样

适用于第四个物体，并可依此类推下去。然而，即使到了今天，就算是三个物体运动的一般问题也还没有确切的解答，不过，人们已经设计出近似程度越来越好的方法。

即便是采用了近似的方法，18 世纪的成就仍然是令人瞩目的。克莱洛 (Alexis-Claude Clairaut) 对哈雷彗星回归的预言证明了数学工作在天文学上的精确性，这是最富有戏剧性的论据之一。有好几个人都曾观测过这颗彗星，哈雷在 1682 年曾试图测定出它的轨道，他预言说这颗彗星将于 1758 年返回。1758 年 11 月 14 日，在巴黎科学院的一次会议上，克莱洛宣布哈雷彗星将于 1759 年 4 月中旬返回到它的近日点，可能的误差是 30 天。这颗彗星比预料的早到了一个月，一个月的误差似乎很大，但是人们最多只能在几天中看到，而且这颗彗星 77 年才能见到一次。

天文学中另一辉煌的成就应归功于拉格朗日和拉普拉斯的工作。人们观测到月球和行星的运动不很规则，这些不规则的运动可能意味着行星将越来越远离太阳或是移向太阳。拉格朗日和拉普拉斯证明了，人们所观测到的木星和土星速度的不规则是周期性变化的，因而它们的运动基本上是稳定的。这个世纪的天文学工作都收录在拉普拉斯恢宏的科学巨著《天体力学》中，这本书在 1799 到 1825 年间共出版了五卷。

拉普拉斯实际上将他的全部生命献给了天文学，他将他所涉猎的每一个数学分支都应用于天文学。众所周知的一个事实是，他在他的著作中经常省略一些困难的数学步骤，并且说："易知……"这说明他实际上对数学细节并无耐心，而只管应用。他对数学的许多基本贡献只是他在自然科学的伟大工作中的副产品，而由别人发展起来的。

同样为人们所津津乐道且富有戏剧性的是海王星的发现。虽然海王星迟至 1846 年才发现，但是这一发现都是建立在 18 世纪数学工作的基础之上的。1781 年，赫谢耳 (William Herscher) 通过一个大功率的新式望远镜发现了天王星，但是天王星的轨迹与人们所预测的并不相符。于是，布瓦德 (Alexis Bourard) 提出这

样一个假想：还有一颗未知的行星在干扰着天王星的运动。人们通过观测和计算这颗未知行星可能的大小和轨迹，以试图确定这颗行星的位置。1845年，亚当斯（John Couch Adams），剑桥大学的一个26岁的学生，对这颗假想的行星的质量、位置及轨道做了详细的估算。当得知这一工作时，格林威治皇家天文台台长，著名的艾利（George Airy）爵士对之不予理睬。但是另外一位年轻的天文学家、法国的列维利尔（Urhain J. J. Leverrier）也独立地推出了和亚当斯相同的结论，并给德国天文学家加勒（Johann Galle）寄去了一套如何找到这颗行星的位置的说明。加勒于1846年9月23日收到了这份资料并于当天晚上发现了海王星，其方位与列维利尔预测的仅差55分。在预测能够精确到万分之一的情况下，对于使这种惊人的预测成为可能的天文学理论，谁又会怀疑它的真实性呢？

除了天文学以外，光学这门学科甚至在古希腊时代就已经部分数学化了。17世纪早期显微镜和望远镜的发明极大地激发了人们研究光学的兴趣，并且像古希腊时代一样，17、18世纪的每一位数学家都致力于这一领域的研究。在17世纪史奈尔和笛卡尔就已经发现了托勒密求而无获的光折射定律：光通过突然改变的介质时，如从空气到水，会发生什么现象。罗伊默（Olaus Roemer）注意到光速是有限的，而牛顿则发现白光是从红到紫所有颜色的光的混合物。这两个事实极大地激发了人们对光学的兴趣。牛顿在《光学》（1704年）一书中大力提倡这门学科并将其归功于显微镜与望远镜的改进。在这里，数学仍然是主要的工具，而欧拉关于光学的一部三卷著作则是另外一个里程碑。

但光的物理本质却一点也不清楚。牛顿认为光是一种微粒的运动，惠更斯则认为光是波的运动，虽然并不是通常意义的波。而欧拉却是第一个用数学处理光振动并得出光的运动方程的人。他力主光的波动本质并在这个问题上成为唯一反对牛顿的人。19世纪早期菲涅尔（Augusfin-Jear Fresnel）和托马斯·扬（Thomas Young）的工作都为他的理论作了辩护。但是光的本质即便在那时

也没有变得更清楚些，数学定律依然占据主导地位。现在被人们普遍接受的光理论、电磁理论，在那时离诞生还有 50 年之遥。

18 世纪时，人们还开辟了一些新的研究领域，并且至少取得了部分成功。第一个就是乐音的数学描述和分析。这一过程颇为冗长，其起源于对一根振动弦，比方说，一根小提琴弦发出的声音的研究，丹尼尔·贝努利、达兰贝尔、欧拉及拉格朗日，对此均做出了贡献。但在对其进行数学分析时，他们之间产生了严重分歧，直到 19 世纪初傅立叶的工作问世后，这种分歧才得以消除。尽管如此，在 18 世纪，这方面的研究仍然取得了巨大的进展。我们现在知道，每个乐音都是基音和泛音组成，泛音的频率，用音乐术语来讲就是音高，都是基音频率的整数倍，这些已在 18 世纪大师们的著作中明确指出，在今天的录音及播放设备，如电话、电唱机、收音机和电视机的设计中都是最基本的知识。

还有一个数学物理的分支至少也是起源于 18 世纪，即对流体（气体或液体）及流体中物体运动的研究。牛顿考虑过这样的问题：一个物体欲在流体中以最小的阻力前进，应当取什么样的形状？在丹尼尔·贝努利的奠基性著作《流体动力学》（1738 年）中，他顺便提及，这个理论可用于描述人体动脉和静脉中血液的流动。随后，欧拉的一篇重要文章（1755 年），推导出了可压缩流体的运动方程。他写道：

> 如果我们仍不能透彻领悟有关流体运动的完整知识，那么归结其原因，并非因为我们对力学或对已知的运动原理认识不足，而是因为（数学）分析本身背弃了我们，因为所有的流体运动理论已经归结于分析公式的求解了。

事实上，流体理论比欧拉想象的要复杂得多，以后的 70 年，又增加了许多知识。比方说，欧拉忽视了粘体（水是无粘流体，但油，则有些粘性，因而流得缓慢）。然而，可以说，欧拉创立了可用于船舶和飞机运动的流体力学。

大自然是数学化的，而上帝肯定是世间万事万物的设计者且

是最有效的设计者，对这种观点，如果说18世纪的人还需什么另外的佐证外，他们已在其他的数学发现中找到。海伦证明了（见第一章）光经过一面镜子的反射，从P点至Q点遵循最短的路线，因为光在此以匀速运动，所以最短距离即最少时间。

17世纪的费马（Pierre de Fermat）作为数学巨擘之一，在相当有限的事实基础上，证明了他的最少时间原理。该原理认为，光在从一点到另一点的过程中，总是选择所需时间最短的路径，显然上帝不仅让光服从数学定律，还让其遵循最短路径。当费马成功地从史奈尔和笛卡尔先前发现的光的折射定律中得到这一原理时，他愈发相信他的原理的正确性了。

到18世纪初，数学家们对自然界总试图将某些重要量取成极大或极小值这一事实有了一些很鲜明的实例。惠更斯起初也反对费马的原理，他认为费马原理不能解释光在连续变化的介质中传播时的现象。但甚至牛顿第一运动定律，即一个运动的，不受任何力干扰的物体，将作直线（最短路线）运动，也是自然界力图节约的范例。

18世纪的人们确信：因为一个完美的世界不能容忍浪费，所以自然的作用应该是花费最少即能达到目的，于是，一个寻找普遍原理的工作开始了。此种原理的第一个公式由莫帕图伊斯（Pierre-Louis Moreau de Maupertuis）提出。他主要是一个数学家，曾率领一支探险队到拉普兰地区（挪威、瑞典、芬兰和前苏联各国靠近北极的地带）丈量沿着子午线一度的长度。他的测量显示了地球确如牛顿和惠更斯通过理论证明得到的那样，其两极是扁平的。莫帕图伊斯平息了J·卡西尼（Jean-Dominique Cassini）及其子亚金（Jacques）相反的论调。莫帕图伊斯因此得了个绰号叫“弄平地球的人”，或者像伏尔泰所说的，他压平了地球和卡西尼们。

1744年，在进行光的理论的研究时，莫帕图依斯在他题为《迄今为止看起来似乎不相容的自然界不同法则的协调性》的论文中提出其著名的最小作用原理。他从费马的原理出发，但考虑到

当时的一些不同见解，如光在水中的速度是否比在空气中大（笛卡尔和牛顿的观点），或者比在空气中小（费马的观点），摒弃了最少时间说法而代之以作用的概念。莫帕图伊斯认为，作用是质量、速度及所经距离乘积的积分（在微积分的意义上），而自然界的任何改变都是要使作用最小。莫帕图伊斯多少有点糊涂，因为他没有规定乘积是在什么时间区间上取的，又因为他在光学和某些力学问题的每个应用中对作用赋以不同的意义。

虽然莫帕图伊斯有一些物理实例来支持他的原理，但他提倡这个原理还是出于宗教理由。物质行为的各种规律应具有上帝创造的完美性，而最小作用原理似乎满足这一准则，因为这个原理显示出自然界是经济的。莫帕图伊斯宣称他的原理是自然界的普遍规律，是上帝存在和她富于智慧的第一个科学明证。

欧拉，是18世纪最伟大的数学家，在1740年至1744年间，他一直就这个话题与莫帕图伊斯通信。他赞同后者的观点，即上帝根据某种基本原理建造了宇宙，这种原理的存在即证明了上帝的能力。他用这样的话来表述他的坚信不疑："宇宙的结构是最完美的，它是一位最为睿智的创造者的杰作。所以，如果没有某种极大或极小的法则，那就根本不会发生任何事情。"

欧拉的观点比莫帕图伊斯更进了一步。欧拉认为所有自然现象之所以表现如此，是因为它们要使某些函数达到极大或极小，因而，基本的物理原理应包括达到极大或极小的函数。无疑，上帝这位数学家比16、17世纪人们所称颂的更为英明，欧拉的宗教信仰还使他确信，上帝赋予人类的使命是运用人类自身的才能去理解她的法则，自然之书已经打开展现在我们面前，但它是用我们一时半会不能理解的语言写成的，只有用毅力、热爱、坚忍和钻研才能读懂，这种语言便是数学。因为我们的这个世界是最好的，所以其法则也应是最好的。

最小作用原理是由拉格朗日阐明并推广的。作用成为基本能量，从这个基本原理出发，可以推导出更多的力学问题的解答，这个原理成了变分法（由拉格朗日在欧拉所作初步工作的基础上创

立的一个新的数学分支）这门学科的核心。英国的“牛顿第二”，哈密尔顿（William R. Hamilton）对这个原理作了更进一步的推广，今天，其是力学中最富内涵的原理，同时也成为物理学其他分支中类似的原理，称为变分原理的范例。然而我们应知道，到哈密尔顿时代，莫帕图伊斯和欧拉关于上帝设计宇宙融合了最小作用原理的推断已被摒弃，一些征兆表明在解释该原理意义时已发生了某种改变。伏尔泰在《阿卡基亚博士的历史》一书中嘲弄了这种证明上帝存在的论点。然而，18 世纪的人们还是坚信这样一个无所不包的原理只可能意味着世界理所当然地是由上帝设计并与这一原理相吻合的。

数学支配一切，18 世纪最伟大的智者对此深信不疑。著名的数学家丹尼斯·狄德罗（Denis Diderot），编纂《法国大百科全书》的主要参与者，说“世界的真正体系已被确认，发展和完善了。”显然，自然法则就是数学法则。

拉普拉斯还有一段更著名的论述：

> 我们可以把目前的宇宙状态看作是宇宙过去的结果和将来的原因。如果一个有理性的人在任何时刻都知道生物界的一切力及所有生物的相互位置，而他的才智又足以分析一切资料，那么他就能用一个方程式表达宇宙中最庞大的物体和最轻微的原子的运动。对他来说，一切都是显然的，过去与未来都将呈现在他眼前。

威廉·詹姆斯（William James）在《实用主义》一书中描述了这个时期数学家们的态度：

> 当最初数学的、逻辑的和自然的统一体，最初的定律被发现时，它们的清晰、美妙和简洁深深地吸引了人们，使众人相信似乎他们已真正成功地读出了万能之主的真正思想。上帝的心智发出轰鸣，作为对演绎法的回声，她也陷入对圆锥曲线、平方、方根和比例的沉思，像欧几里得那样进行几何研究。她

> 为行星运动确立了开普勒定律，她使落体的速度与时间成比例地增长。她还创造了正弦定律，使光在折射时遵循。……上帝构想出一切物体的原型，设计出它们的变体，而当我们重新发现了其中任何一个神奇创作时，也就是说我们理解了她的原始本意。

坚信自然是上帝依据数学设计的，甚至在诗中也得到了反映，例如，约瑟福·艾迪生（Joseph Addison）在他的《赞美诗》中写道：

> 高高苍天，
> 蓝蓝太空，
> 星汉灿烂，
> 正是它们本源使然。
> 太阳东升西落，日复一日，
> 把她有力的圣光，
> 洒向四面八方，
> 这就是万能的主，功德辉煌。
> ……
> 所有的行星都恪守规矩，
> 在它们自己的轨道上旋转，
> 把真理传到每一寸土地上。

到了18世纪末，数学已如同一棵根深蒂固的参天大树，扎根于现实之中已有两千年之深，它威风凛凛的枝条覆盖了所有其他知识体系，无疑，这棵大树将永远生存下去。

第四章 第一场灾难：真理的丧失

每个时代都有其神话，并称之为更高的真理。

——无名氏

进入19世纪，数学界正是一派祥瑞景象：拉格朗日仍然活跃在数学界，拉普拉斯正处在他智力的顶峰时期，傅立叶致力于研究他1807年的手稿，这篇手稿后来并入了他的经典著作《热论》（1822年）；高斯（Gauss）刚刚发表了他的《算术研究》（1801年），这是关于数论的一个里程碑，随后他又做出了许多的贡献，为他赢得了数学王子的雅称；高斯的法国同行柯西（Augustin-Louis Cauchy）在他1814年的一篇论文中显露出超凡的才能。

通过对这些人的工作的简单介绍，可以看出19世纪前半叶在发现自然设计的奥秘的过程中取得了巨大进步。尽管高斯在数学上做出了巨大贡献——我们很快将要讨论其中之一——但他把大部分时间投入了物理学研究。事实上他并不是数学教授，在将近50年的时间里，他一直担任天文学教授和哥廷根天文台台长。天

文学占去了他的绝大多数时间和精力，而且他对天文学的兴趣可追溯到他在1795—1798年在哥廷根求学的时候。1801年他获得了他的第一项令人瞩目的成就，那年1月1日皮亚奇（Giuseppi Piazzi）发现了小行星谷神星。尽管能观察到的时间只有几个星期，当时年仅24岁的高斯却在观察中运用了新的数学方法，并预言了这颗行星的轨迹。这一年的年底的观察结果与高斯的预言十分接近。1802年当奥伯斯（Wilhelm Olbers）发现另一颗小行星智神星的时候，高斯又一次成功地算出了它的轨迹。在高斯的主要著作之一《天体运动论》（1809年）中，对所有这些天文学方面的早期工作作了总结。

后来，应汉诺威公爵之邀，高斯对汉诺威进行了测量，奠定了大地测量学，并由此产生了微分几何的创造性思想。在1830年到1840年间对理论和实验磁学中的物理研究也获得了巨大的成功，他创造了测量地球磁场的方法。麦克斯韦（James Clerk Maxwell），这位电磁场理论的奠基人，在他的《电学和磁学论》中说，高斯的磁学研究重新构造了整个科学：使用的工具，观察的方法及对结果的计算。高斯的地磁学论文是物理研究的典范。为了纪念这项工作，磁场的单位叫做高斯。

尽管高斯和韦伯（Wilhelm Weber）并没有首创电报的思想，（因为在此之前其他人已有许多尝试），1833年他们却设计了一个实用的装置，能使指针向左或向右偏转，转的方向依赖于导线上电流的方向。这只是高斯的若干发明之一。他还从事光学方面的研究，这是一项自欧拉时代以来就一直被忽略的学科。他在1838—1841年间所做的研究奠定了处理光学问题一个全新的基础。

19世纪在数学界能与高斯匹敌的就是柯西了，兴趣广泛的柯西数学论文超过700篇，数量上仅次于欧拉，按现代的版本算是整整26卷，涉及数学的所有分支。他是复变函数论（见第七章、第八章）的奠基人。但柯西投入到物理问题中的精力至少与投入到数学中的一样多。1815年由于一篇关于水波的论文使他获得了

法国科学院颁发的一项奖励。在小棒及弹性膜（例如金属薄片）的平衡，弹性介质中的波等方面，他都写出了奠基性的著作。他也是数学物理这一分支的创始人。他从事于由菲涅耳创建的光波理论的研究并把这项理论扩展到光的分解和偏振领域。柯西是一流的数学物理学家。

虽然傅立叶的工作与高斯和柯西并不完全在同一领域，但由于他为数学领域热的传导带来了更为实质性的进展，因此他的工作尤其值得一提。傅立叶把这一学科看作宇宙研究中最重要的一环，因为对地球内部的热传导的研究有可能证明地球是从一种熔化状态冷却凝固而形成的，这样就可以对地球的年龄做一些估计。在这项工作过程中他发展了无穷三角级数——现在称为傅立叶级数——的理论，使得它能用于许多其他的应用数学领域中。对他的工作无论用什么词来赞誉都是不过分的。

高斯、柯西、傅立叶以及其他数百人的成就似乎成了不容反驳的明证：越来越多关于自然界的真理正在被揭示。事实是整个19世纪中数学巨人们一直在沿着先人铺设的道路前进，创造了更为有力的数学方法并把它成功地应用到对自然界的进一步探索中。他们加速寻求自然界的数学定律，他们似乎被这样一种信念所驱使：他们就是神派来揭示上帝意图的。

假如他们对一些同行的行为稍加注意，那么，也许他们会对即将面临的灾难有所准备。培根早就在他的《新工具》（1620年）中写道：

> 一个群体的观念是与生俱来的，与群体和种族关系甚密。因而人的感觉有时错误地被当作事物的标准。另一方面，所有感觉上的或是心智上的领悟力，依赖于人而不是宇宙。而人的心智就像不平坦的镜面，把自己的性质转赋给了事物。光线原由事物发出，而镜子使之扭曲变形。

在同一部著作中培根倡议用经验和实验作为所有知识的基础，他写道：

> 推理建立起来的公理不足以产生新的发现，因为自然界的奥秘远胜过推理的奥秘。

是什么导致了上帝在设计宇宙中作用的削弱，即使是最忠实的信徒也会无意地在这个问题上发生分歧。

哥白尼，开普勒都将他们的日心说理论看作是上帝的数学智慧的明证。但它却是与《圣经》中人的重要性相冲突的。伽利略、波义耳（Robert Boyle）、牛顿坚持说他们进行科学研究的目的在于证明上帝的意图和存在，但实际上他们的工作中甚少涉及上帝。事实上伽利略在他的一封信中说道："对我来说从来没有任何关于《圣经》的直接讨论，以前从来没有哪个天文学家或科学家像我这样干过。"当然，正如我们所看到的那样，伽利略是相信上帝的数学设计的，他之所以这样说只是为了说明在解释自然界的奥秘时，不应该引入其他的神秘的或是超自然的力量。在伽利略的时代，万能的上帝能改变他的设计这一信仰占着统治地位。而笛卡尔，这位虔诚的教徒却宣称自然界的法则是不可改变的。这就无疑地限制了上帝的能力。牛顿也相信宇宙的固有秩序，并且指望上帝依照自己的旨意来维持世界运转。他把这比作钟表匠修理钟表来使之正常工作。牛顿有充分的理由相信上帝的创造：尽管他十分清楚由于一颗行星的轨迹受到其他行星的影响从而不是一个真正的椭圆，他却不能从数学上证明这种偏离是由于其他行星对它的引力产生的，因此他认为，除非是上帝按照自己的计划继续使宇宙运行，否则不可能维持其稳定。

莱布尼茨反对这种看法，在他 1715 年 11 月给牛顿的拥护者、哲学家克拉克的信中，他这样评价牛顿关于上帝经常需要给宇宙修理和上弦的观点的："上帝似乎并没有足够的远见维持世界的永远运动。……在我看来，世界上的力和能是恒定的，依据自然法则从物质的一部分转移到另一部分而已。"莱布尼茨指责牛顿否认了上帝的能力。实际上，莱布尼茨还指责牛顿使英国的宗教信仰日趋衰弱。

莱布尼茨的话并没有说错，牛顿的工作无意中使自然科学第

一次从神学中分离或者解放出来。我们已经提到过，伽利略坚持说自然科学必须与神学相分离，而牛顿在他的《原理》一书中坚持这一原则，朝着对自然现象给以纯数学的解释迈进了一大步。因此上帝越来越多地被排斥在科学理论的数学描述之外了。实际上，牛顿所没能解释的那些反常现象在后来的研究中得到了根本上的解释。

制约天体和地面物体运动的普适法则逐渐统治了整个知识界，而且预言和观察结果的持续一致说明了这法则的完善。尽管在牛顿之后，仍然有人认为这种完美的设计出自于上帝之手，但上帝已退到幕后。宇宙的数学法则则成为了焦点。莱布尼茨注意到在牛顿的《原理》中暗示着：不论有没有上帝，世界依然我行我素，于是攻击这本书为非基督徒的。追求纯粹的数学结果的目的逐渐取代了对上帝的设计的关注。虽然欧拉之后的许多数学家仍然相信上帝的存在，相信上帝对世界的设计，以及数学作为一门科学其主要功能是提供破译这个设计的工具，但是随着数学的进一步发展以及其后的更多的发展，数学研究从神那儿得到的启示越来越少，上帝的存在性也变得模糊起来。

拉格朗日、拉普拉斯虽出身天主教世家，却是无神论者。拉普拉斯完全否认上帝是世界的数学设计者。有个著名的故事说，拉普拉斯把他的《天体力学》呈献给拿破仑时，后者说："拉普拉斯先生，他们告诉我，你写了这本关于宇宙系统的书，却根本没有提到它的创造者。"据说拉普拉斯是这样回答的："我不需要这种假说。"自然代替了上帝，正如高斯所说："你，自然，我的女神，我对你的规律的贡献是有限的。"高斯确信有一个无时不在，无所不知，无所不能的上帝，但却认为上帝与数学及宇宙的数学规律探索没有丝毫联系。

哈密尔顿关于最小作用原理的工作（见第三章）也揭示了知识界观点的转变，在1833年的一篇文章中，他写道：

> 虽然最小作用定理已立足于物理学最高级定理之林，然而从宇宙经济的基地上看，当时人们普遍

> 拒绝把它作为宇宙规律的主张。对此，拒绝恰恰在于其他理由，事实上伪装节约的都是常常浪费地消耗着……因此，我们不能认为这个数量的节约是由宇宙的神的思想设计的。不过，某种高度的简洁可以被认为是包含在这一思想中。

回顾一下就可以看出，自然是上帝的数学设计这一信条正在被数学家们的工作所削弱。学者们越来越多地相信，人的推理是最有力的工具和最好的证明，因为它是数学家的成功。如果为了正当的理由要去捍卫它们，为什么不能将推理用于评判流行的宗教与伦理的信条呢？幸或不幸的是将推理运用于宗教信仰的基础损害了许多正统观念的根基。宗教信仰因此而从正统观念分化出许多的旁门左系，诸如唯理论的超自然主义、自然神论、不可知论或是干脆的无神论。这些运动对18世纪那些学识广博的数学家产生了一定影响。正如狄德罗这位唯理论者，反教权主义时代的知识界领袖所说："让我相信上帝，必须让我能摸到他。"不是所有19世纪的数学家都否认上帝的地位。柯西这位虔诚的天主教徒指责人们"毫不犹豫地抛弃与已发现的定理矛盾的一切假说。"然而把上帝看作宇宙的数学设计者这样的信仰还是开始衰退了。

这种信仰的衰退不久就产生了这样一个问题，即为什么自然的数学法则一定是真理呢？最早对真理问题提出质疑的人中有狄德罗。在他《自然的解释》(1753年)中说，数学家就像赌徒：二者都与自己发明的抽象规则赌博。他们的研究主题只是毫无事实基础的规则。学者冯登利(Bernard Le Bovier de Fontenelle)在他的《世界的多元性》(1686年)中对此也同样持批评态度。他对天体运动法则不变性的攻击是这样的：只要玫瑰花还在开放，园丁就永远不会死去。

数学家们愿意相信是他们提供了哲学家思想的源泉，但在18世纪，哲学家们都是否认物质世界真理的先驱。我们略过霍布斯、洛克(John Locke)和大主教贝克莱的教条，这不是由于它们能被轻易地驳倒而是因为它们不像激进的休谟(David Hume)那样有

影响力。实际上休谟不仅赞同贝克莱的观点，甚至走得更远。在他的《人性论》(1739—1740年)一书中，休谟强调，我们既不了解精神，也不了解物质，两者都是虚幻的。我们只接受感觉，诸如印象、记忆和思想等简单的概念只是这些感觉的模糊反映，任何复杂概念都是简单概念的集合。精神实际上只是我们的感觉和概念的集中，除了可以通过直接经验所感知的事物，我们不能假定任何其他事物的存在，然而经验只能产生感觉。

休谟对物质持同样的怀疑态度。谁能保证有一个永远存在的实物的世界，所有我们能够知道的只是我们对这样一个世界的感觉。重复地感知一张椅子并不能证明这椅子确实存在，时间和空间只是我们产生概念的方式和顺序，同样的，因果关系只不过是概念在习惯上的一种联系而已。无论是时间还是空间，或是因果关系，都不是客观实在，我们被自己的感知能力所迷惑，因而相信了这样的实在：存在一个有确定属性的外部世界。这实际上只是一种无根据的推论，知觉的产生是不可理解的。我们不知道，它是来自于外部事物、心灵深处还是上帝。

人本身不过是单个的感觉和思想的集大成者，他只能这样存在着。“自我”就是不同的感知力的汇聚。任何试图了解自己的尝试最终只能导向领悟。所有其他的人和假定存在的外部世界只是某一个人的领悟，而且没有什么能保证他们确实存在。于是也就不可能有任何关于一个永恒的客观的物质世界的科学法则。这样的法则仅仅是一种感觉的合适的总结。更进一步说，由于因果概念并不是基于科学的证明而不过是一种来自于经常发生的“事件”的通常的顺序的思维习惯，所以我们无法了解，过去感知到的事件将来还会不会再发生。这样休谟就否认了自然法则的必然性、永恒性以及不可破坏性。

否认了外部世界遵循固定的数学定律这一信条，休谟也就否认了代表实在的逻辑推理结构的价值。但是数学中也包含着关于数字和几何的定理，其毫无疑问是从包含数字和几何的假设真理中推出来的。休谟并不否认公理，但却贬损它们以及由之推导出

的结果。公理来自于对假定存在的物理世界的感知，定理的确是公理的必然结果，却无非是公理的精确复述。它们是推论，但只是隐含在公理中的论断的推理。因此公理和定理，都是同义重复，并不是真理。

由是休谟回答了“人怎样获得真理”这一基本问题——他否认真理的存在，人不可能区别真理。休谟的工作不仅贬损了在科学和数学上付出的努力和得到的结果，还对推理本身的价值提出了质疑。对于大多数18世纪的思想家来说，这样一种对人类最高智慧能力的否认是大逆不道的。数学家、人类推理的其他成就如此辉煌以至于到了“不可一日无此君”的地步。休谟的哲学对于18世纪绝大多数的学者来说是矛盾和令人嫌恶的，而且与数学和其他科学中的惊人的成就是如此格格不入，因此遭到了驳斥。

历史上最受尊敬的可能也是最深邃的哲学家康德发起了这一挑战。但是对康德殚精竭虑所提出的结论进行仔细推敲后发现其并不比其他人的更令人信服。在他的《未来形而上学导言》(1783年)一书中，康德看来确是站在科学家和数学家一边：“我们可以确切地说：纯粹的先验的综合知识，纯粹数学和纯粹物理学是真实存在也是先天既定的，二者都包含一些被广泛承认、绝对肯定的命题，……而且是独立于经验的。”在他的《纯粹理性批判》(1781年)一书中，康德甚至使用更为确信的词语作为开头，他肯定所有的数学公理和定理都是真理，但是为什么？康德自问道。他愿意接受这样的真理吗？显然经验本身并不足以证明它们的有效性。如果你能回答一个更大的问题——数学确实是一门科学吗——你也就能回答这个问题了。康德的回答是：时间和空间的形式依我们的心智所定，所谓时间和空间只是我们感知的一种模式。这种感知——康德称之为直觉——的模式由心智对待经验的方式决定。我们依据这些智力形式去感知，组织和理解经验，经验与之相符犹如面团符合于它的模子。心智将这些方式加到感觉、印象上去使感觉与内在的模式相吻合。既然空间的直觉来源于心智，那么心智自动地接受空间的某些属性，诸如直线是两点间的最短

路径，三点确定一平面以及欧几里得的平行公理。康德称这些真理为一个先验的假设的真理，它们是我们心智构成的一部分。几何学的科学性恰恰在于其揭示了这些真理的逻辑推断，心智正是通过"空间结构"来对待经验这样一个事实说明经验与基本原理和定理是一致的。我们自认为感知到的外部世界的秩序和理性是由我们的精神和我们的思考方式加诸其上的。

康德既然从人的大脑创造出了空间，那他也就看不出有什么理由不让它是欧氏空间。他不能构想出其他的几何空间。这促使他相信，不存在别的空间，由此欧氏几何定理既不是宇宙中固有的，也不是由上帝设计出来的，它是使人的感性认识条理化、理性化的作用结果。至于上帝，康德说上帝的本质不在理性知识范围内，但我们还是应该相信上帝。康德在几何上的轻率超过他在哲学上的大胆。他没有到过离东普鲁士城市哥尼斯堡他的家 40 英里以外的地方，然而他却假定他能决定世界的几何形状。

科学的数学法则又是如何呢？由于所有的经验都是时间和空间的精神框架所构成的，数学一定吻合于所有的经验。在他的《自然科学的形而上学基础》(1786 年)中康德承认牛顿定律及其推论是不证自明的。他宣称已知证明了的牛顿运动定律可由纯粹推理导出，而且这些定律也是唯一能使自然界被理解的假设。他说，牛顿所给予我们的，对宇宙如此清晰的领悟，永远也不会改变。

更一般地，康德认为科学的世界是一个由精神所组织和控制的，与内在的范畴，诸如空间、时间、因果以及物质等相一致的感官印象的世界。精神包含客体必定符合的结构。感官印象确乎来自于真实的世界，然而不幸的是，这个世界是不可知的，所谓实在只是借助于感知，通过主观分类所了解的。因此除了欧氏几何和牛顿力学，没有别的办法来使经验条理化。随着经验的增加，新的科学的形成，心智并不会从这些新的经验中提取并形成新的原理。而是将沉睡的心智部分唤醒来解释这些新的经验。心智的观察力是靠经验来启发的，这就解释了为什么有些真理譬如说力学定律发现得相当晚，而有些则在几个世纪前就为人们所知了。

康德的哲学几乎是毫不掩饰地推崇理性，然而他认为理性的作用不在于对自然界的探索，而在于开发人类心智荒芜之处。由于来自于外部世界的感知提供了精神组织的原始材料，因此经验就作为知识的必然因素而被认可，而数学就是精神的必然法则的揭示者。

数学家们是习惯于“数学是一个先验真理的体系”这一论断的，但大多数人并没有对康德是如何得出这个结论给以足够的注意。否则他的学说——数学家所证明的并非是物质世界固有的，而是来自于人类的精神——会使所有的数学家停止工作。我们实际中所固有的与所感觉的是同一结构吗？这种空间的感知结构一定是欧氏的吗？我们如何知道这一点呢？与康德不同的是，数学家和物理学家仍然相信存在一个受独立于人的精神的法则支配的外部世界。人只是揭示其设计规律并用来预测在这个外部世界中将要发生的事情。

康德的学说既有解放思想的一面，也有束缚思想的一面，由于强调了精神能够组织，我们并不真正了解的世界中的经验，他为创建与当时人们坚信的概念相反的概念打下了基础，但由于他坚持依照欧氏几何法则来组织空间感知，他阻碍了其他观点的接受。如果康德对同时代的数学家的工作多加关注，也许他对这一观点不会那样固执己见了。

对于“上帝是宇宙原则的制定者”这一信仰的漠视甚至否认以及康德的“法则存在于人的精神的结构中”的观点，引起了“神圣的设计者”的报复，上帝决定要惩罚这些康德主义者，尤其是那些自以为是、盲目自信的数学家们。因而他转而鼓励非欧几何，这项发明摧毁了人类自以为推理是自给自足、无所不能的信条。

尽管到1800年时上帝的存在越来越不被感觉到，而且一些像休谟那样偏激的哲学家否认所有真理，然而当时的数学家们还是相信严格的数学真理和自然界的数学法则。在所有的数学分支中，欧氏几何最受推崇。这不仅由于它是第一个用演绎方法建立起来

的，而且在两千多年的时间里，它的定理一直完美地与客观事实一致。“上帝”所攻击的正是欧氏几何。

欧氏几何中有一条公理一直在困惑着数学家们，不是由于他们对其正确性有任何怀疑之处，而是由于它的表达方式。这就是平行公理，或者通常称为欧几里得的第五假设，欧几里得的表述是这样的：

> 如果一条直线（图 4.1）与两条直线相交，使得一侧的内角不都是直角，则如果将这两条直线延长，它们在内角不都是直角的直线一侧相交。

即若$\angle 1+\angle 2<180°$，将 a、b 充分延长，则它们必定相交。

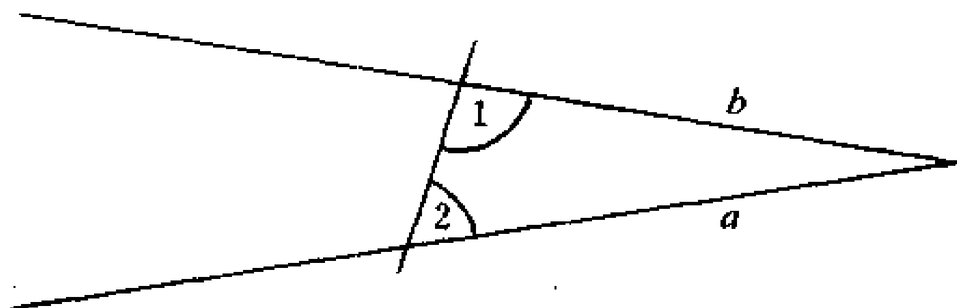


图 4.1

欧几里得有很好的理由以这种方式表述他的公理。他本可以用另一种方式来叙述：若$\angle 1+\angle 2=180°$则直线 a 与直线 b 永不相交，即直线 a 平行于直线 b，但欧几里得显然是害怕假设有永不相交的无限直线。当然经验并没有提供无限直线的性质，而公理是被认为是关于物理世界的自明的真理。然而他确实以他的平行公理和其他公理证明了平行直线的存在。

欧几里得对平行公理的叙述被认为有点过于复杂了，它缺少其他公理的简洁性，显然连欧几里得本人也不喜欢他对平行公理的叙述，因为直到所有可以不用它的定理都被证明出来以后，他才提到它。

一个并没有使许多人不安然而最终却至关重要的问题是能否肯定在客观世界中存在无限直线。欧几里得的措词颇为谨慎，你可以按需要任意延长一条（有限）直线，且延长后的直线仍然是

有限的。欧几里得确实暗示了无限直线是存在的：否则在任何情况下也不能按需要任意延长。

早在希腊时代，数学家们就开始致力于解决欧几里得的平行公理所带来的问题了。他们做了两种不同类型的尝试，一种是用看来更加自明的命题来代替平行公理。另一种是试图从欧几里得的其他九条公理中推导出平行公理。如果这一办法可行则平行公理就成为定理，也就无可怀疑的了。在两千多年的时间里，许多著名的数学家曾从事于这两方面的研究。至于那些无名之辈，我们就不去多说了。这段历史相当长而过于专业化，它们中的大部分不在这里重述，因为它们很容易查到而且并不大切题*。

在众多的替代公理中有一条是我们今天通常在中学里学习的，因而值得一提：这是普莱费尔（John Playfair）1795 年提出的平行公理的另一种说法：过不在直线 l 上一给定点 P（图 4.2），有且仅有一条由 l 和 P 确定的平面上的直线，不与 l 相交。

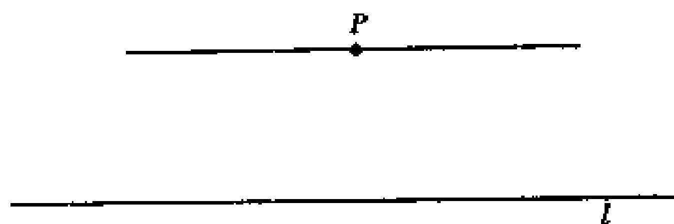


图 4.2

所有的替代公理似乎都比欧几里得的要简单，但进一步考察就会发现，它们并不比欧几里得的叙述更令人满意。其中许多，包括普莱费尔的叙述涉及到空间的无穷远处。另一方面，那些不直接提及“无限”的替代公理，例如，“存在两个相似但不全等的三角形”，看起来比欧几里得本人的平行公理更为复杂，更不可取。

在试图用第二种方法，即从其他九条公理中推出平行公理以解决平行公理问题的努力中，最有意义的是萨谢利（Gerolamo

* 这段历史可以在波诺那（Roberto Bonola）的《非欧几何》中找到，此书于 1906 年用意大利语首次出版，1955 年，由多佛出版社重印了英译本。 ——原注

Saccheri）的工作。他是一个耶稣会教士，帕维尔大学的教授。他的思想是，如果你使用了一个本质上不同于欧几里得平行公理的公理的话，你将得出与他的其他公理矛盾的定理。这种矛盾意味着否认平行公理——它是唯一存在疑问的公理——是错误的。因此欧几里得的平行公理一定是正确的，即它是其余九条公理的推断。

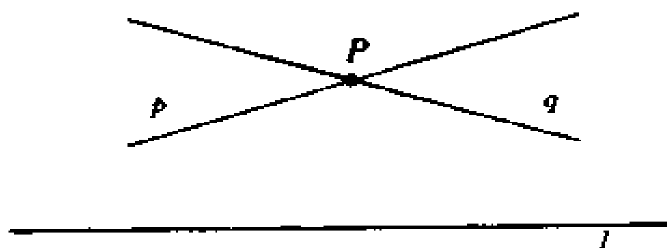


图 4.3

考虑普莱费尔的公理，它与欧几里得的公理是等价的，萨谢利首先假定*过 P 点（图 4.3）没有与 l 平行的直线，则由这一公理和欧几里得采用的其他九条公理，萨谢利确实推出了矛盾。萨谢利接着又试了其他可能的假设。即过 P 点至少有 2 条直线 p 和 q，不管如何延伸总不与 l 相交。萨谢利进一步证明了许多有趣的定理，直到他推出一个奇怪而且令人讨厌的结论，他认为它与前面得出的结论是矛盾的。由是萨谢利认为有理由推出结论：欧几里得的平行公理是其他公理的推论，因此将他的书命名为《欧几里得无懈可击》（1733 年）。然而后来的数学家发现萨谢利并未真正推出矛盾，因此平行公理的问题依然存在。花在寻找一个可接受的欧几里得平行公理的替代公理或证明它是其他九条公理的推论上的精力如此巨大而且徒劳无功，以致于达兰贝尔在 1759 年称平行公理问题是“几何原理中的家丑”。

渐渐地数学家们开始正确地理解欧几里得的平行公理的重要性。1763 年克吕格尔（Georg S. Klugel）在他的博士论文中提出了引人注意的论点：即人们确信欧几里得平行公理为真理是基于

* 以下的描述对萨谢利的原步骤已略加修改。　　——原注

经验的，他熟知萨谢利的书和许多试图证明平行公理的方法，后来他成为海姆斯塔特大学的教授。这一论点首次引进的思想是：公理的实质在于符合经验而并非其不证自明*。克吕格尔对欧几里得平行公理能够证明表示怀疑，而且他认识到萨谢利并未得出矛盾，仅仅得到一些奇怪的结果。

克吕格尔的论文启发了兰伯特（Johann Heinrich Lambert）在平行公理上所做的工作，在他的《平行线理论》（写于1766年，1786年出版）中，兰伯特类似于萨谢利，考虑了两种不同的情况。他也发现假设过 P 没有平行于 l 的直线（见图4.3）会导出矛盾，但他与萨谢利不同的是他没有得出假定过 P 至少有两条平行线则得到矛盾的结论。而且，他意识到不推出矛盾的任何一组假设都能产生一种可能的几何。尽管这种几何可能与实际图形没有什么关系，但却是一种有效的逻辑结构。

兰伯特和其他人（例如克斯特纳（Abraham G. Kästner），哥廷根大学的教授，也是高斯的老师）的工作都强调一个基本点，就是欧几里得的平行公理不能由其他九条欧几里得的公理证明，那也就是说，它是独立于其他公理的。进一步，兰伯特认为有可能通过引入一条异于欧几里得平行公理的公理来建立一个逻辑上一致的几何，尽管他没有作出这种几何应用的可能性的判断。这样，他们三人都认识到了非欧几何的存在。

从事欧几里得平行公理工作最著名的数学家当属高斯。高斯十分清楚试图证明欧几里得平行公理是徒劳的，在哥廷根这已是常识。事实上，高斯的老师克斯特纳完全了解这些工作及全部历史。数年以后的1831年，高斯告诉他的一个朋友，早在1792年（当时高斯只有15岁），他就已经掌握能够存在一种逻辑几何的思想，欧几里得平行公理在其中不成立。但是直到1799年，高斯仍然试图从其他更可信的假设之中推导欧几里得平行公理，而且尽管他能够构想出逻辑的非欧几何，他还是相信欧氏几何是物理空

* 牛顿也曾有过如此断言，但未着重强调之，因而被忽略了。　——原注

间的几何。然而，1799年12月17日，高斯写信给他的同行和朋友，数学家鲍耶（Wolfgang Bolyai）：

> 至于说到我，我在我的工作中已经取得一些进展，然而，我选择的道路决不能导致我们寻求的目标（平行公理的推导），而你让我确信你已达到。这似乎反而迫使我怀疑几何本身的真理性。诚然，我所得到的许多东西，在大多数人看来都可以认为是一种证明，而在我眼中却什么也没有证明。例如，如果我们能够证明可以存在一个直线三角形，它的面积大于任何给定面积的话，那么我就立即能绝对严密地证明全部（欧几里得）几何。
>
> 大多数人肯定会把这个当作真理；但是我，不！实际上，三角形的三个顶点无论取多么远，它的面积可能永远小于一定的极限。

大约从1813年起，高斯开始发展他的非欧几何，最初称之为反欧几何，后称星空几何，最后称为非欧几何。他相信它在逻辑上是相容的，并且确信它一定也是能够应用的。

高斯在1824年11月8日写给他的朋友托里努斯（Franz Adolf Taurinus）的信中说：

> 假定（三角形）内角之和小于180°将导出一种奇怪的几何，它与我们的（欧氏）几何迥然不同，然而却是完全相容的，我已经将它发展得令自己完全满意了。它的定理看起来是矛盾的，但是，如果你从最开始的不习惯开始对它进行平心静气的深入细致的思考，就会发现这里并没有包括什么不可能的东西。

在1829年1月27日写给数学家、天文学家贝塞尔的信中，高斯再一次肯定了平行公理不能由欧几里得的其他公理证明出来。

我们在此不讨论高斯创建的非欧几何的细节，他没有写出过完整的推导，而他所证明的那些定理与我们很快将要讨论的罗巴

切夫斯基（Lobatchevsky）及J·鲍耶的工作多有相似之处。在给贝塞尔的信中他说他也许永远不会发表他在这方面的发现，因为他害怕遭人讥笑，或者如他所说，他害怕波尔第人的嚷嚷（波尔第人是众所周知的一个心智鲁钝的希腊部族）。但人们应记得，虽然一些数学家逐渐达到非欧几何研究的顶峰，然而在整个学术界占统治地位的信念仍然是，欧氏几何是唯一可接受的几何。我们所知道的高斯在非欧几何上的工作，是从他给朋友们的信中透露出来的。1816年与1822年《哥廷根学报》上的两篇短评和1831年的一些注记都是他去世后在遗物中发现的。

两个由于创建非欧几何而获得的荣誉多于高斯的人是罗巴切夫斯基和J·鲍耶。事实上，他们的工作是前人的创造性思想的压轴戏，但是由于他们发表了系统的推导文章，他们通常被称为非欧几何的创立者。罗巴切夫斯基是俄国人，他曾就读于喀山大学，并在1821年到1846年间在那里任教授和校长。从1825年起，他开始在多篇论文和两本书中就几何基础的问题提出自己的观点。J·鲍耶是W·鲍耶之子，系匈牙利军官，他发表了一篇关于非欧几何——他称之为绝对几何——的26页的论文《绝对空间的科学》，作为他父亲的两卷著作《为好学青年的数学原理论著》的第一卷的附录，尽管这本书是1832—1833年出版的，但是在罗巴切夫斯基的著作出版之后，J·鲍耶似乎是在1825年就已经形成了有关非欧几何的思想，并且在那时就已确信新几何不是自相矛盾的。在1823年11月23日写给他父亲的一封信中，J·鲍耶写道："我已得到如此奇异的发现，使我自己也为之惊讶不已。"

高斯，罗巴切夫斯基和J·鲍耶都认识到欧几里得的平行公理不能在其他九条公理基础上证明，也认识到附加平行公理是建立欧几里得几何所必需的。既然平行公理是独立的，于是至少从逻辑上讲有可能采取一个与此相矛盾的命题，并从新的一组公理来推导出结论。

这几个人所创建的技术内容相当简单，由于他们三人做的工作是同样的，这里我们只叙述罗巴切夫斯基的工作。罗巴切夫斯

基果敢地放弃了欧几里得的平行公理并提出自己的假设（与萨谢利的假设一样）。给定一条直线 AB 和点 P（图 4.4），则所有过 P 的直线可按与 AB 的关系分为两类，即与 AB 相交的和不与 AB 相交的。第二类中的两条直线 p、q 是两类直线的边界。更准确地说，若 P 是到 AB 垂直距离为 a 的一点，则存在锐角 A，使得所有与直线 PD 夹角小于 A 的直线都与 AB 相交，与 PD 夹角大于等于 A 的直线不与 AB 相交，与 PD 夹角为 A 的直线 p、q 称为平行线，A 叫做平行角。过 P 点且不与 AB 相交（不包括平行线）的直线称为不相交直线，尽管在欧几里得的意义上它们是平行的。从这个角度来说，罗巴切夫斯基几何允许过 P 点有无限多条平行线。

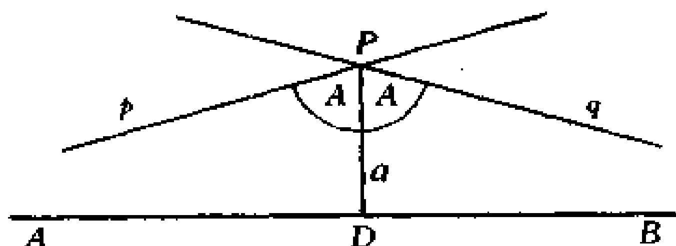


图 4.4

他接着证明了几个主要定理。若角 A 等于 $\frac{\pi}{2}$ 则得到欧几里得的平行公理。若 A 为锐角，则随着距离 a 趋近于 0，角 A 增大趋近于 $\frac{\pi}{2}$；当 a 趋于无穷大，A 减小且趋于 0。三角形的内角和总是小于 180°，且随着三角形面积的减小而趋近于 180°。而且，两个相似三角形必定全等。

任何较大的数学分支甚或较大的特殊成果，都不会只是个人的工作。充其量，某些决定性步骤或证明可以归功于个人。这种数学积累发展特别适用于非欧几何。如果非欧几何意味着一系列包括异于欧几里得平行公理的公理系统的发展，那么最大的功绩必须归于萨谢利。即便是他也利用了很多人寻求更易于接受的替换欧几里得公理的工作。如果说非欧几何的创立意味着人们认识到了除了欧氏几何之外还可以有它种几何的话，那么它的创立应

该归功于克吕格尔和兰伯特。然而关于非欧几何最大的事实是它同样可以像欧氏几何一样，准确地描述物理空间的性质。欧氏空间不是物理空间所必然有的几何。它的物理真实性不能由任何先验基础得证。这种认识，不需要任何技术性的数学推导（因已有人做过），最早是由高斯得到的。

根据他的一篇传记可知，高斯曾经试图检验这一观点。他注意到在欧氏几何中三角形内角和为180°，而在非欧几何中小于180°，他曾花了几年时间对汉诺威王国进行测量，并记录了数据。因此有可能他用这些数据来测量三角形的内角和。在1827年写的一篇著名的论文中，高斯注意到由布诺肯山（Brocken）、霍赫海根山（Hohehagen）和英色伯格山（Inselberg）三座山峰构成的三角形内角和为180°15″。这什么也证明不了，因为测量误差远大于15″，也许正确的和不会超过180°，高斯一定意识到这个三角形太小了。因为在他的非欧几何中，三角形内角和与180°的偏离程度正比于它的面积。只有非常巨大的三角形，比如在天文学研究中的三角形，才能显示出明显的偏离。然而高斯还是相信这门新的几何和欧氏几何一样有实用性。

罗巴切夫斯基也考虑了他的几何在物理空间中的应用，而且确实给出了证据，说明它可用于非常大的几何图形。因此，到了19世纪30年代，非欧几何已不仅仅是被少数几个人接受了，而且它在物理空间的适用性被认为至少是可能的。

最初由高斯的工作提出的问题——哪种几何适合于物理空间——促使了一门新的几何学的产生，它使数学界更加相信，物理空间的几何可以是非欧几里得的。它的创建者是黎曼（Georg Bernhard Riemann），他是高斯的学生，后来成为哥廷根的数学教授。尽管他并不知道罗巴切夫斯基和J·鲍耶的工作的详细内容，但高斯是知道的，而且黎曼一定知道高斯对欧氏几何的必然适用性持怀疑态度。

高斯指定黎曼把几何基础作为他应该发表的就职演说的题目，这是黎曼为申请获得无薪大学教师（其报酬直接来自学生的

学费）资格所应做的演说。黎曼于1854年给哥廷根的教授集团做了这一演讲（1868年它以《关于几何学基础的假设》为题发表），高斯也在场。在这篇论文中，黎曼重新考虑了空间结构的全部问题，他首先考虑的问题是，关于物理空间，我们究竟可以确信什么？在我们凭经验确定物理空间可能具有的性质前，什么条件或事实必须预先假定呢？从这些被当作公理的条件和事实出发，他打算推导出更多的性质。这些公理和它们的逻辑结果应该是先验的，绝对正确的。空间的任何其他性质都必须是由经验得到的。黎曼的目的之一是为了证明欧几里得的公理，与其说是自明的，还不如说是经验的。他采用了分析（微积分及其扩展）的方法，因为在几何证明中我们可能会被感觉误导，去假定一些不是显然可以承认的事实。

黎曼处理空间结构的方法极富普遍性，在此我们没有必要对它做详细的讨论。在研究什么可以作为先验知识的过程中，他区别了空间的无界和无限（这样球的表面是无界但不是无限的），这一区别后来变得更为重要。他指出无界比无限具有更大的经验可信度。

黎曼关于空间可以是无界的而不是无限的这一观点启发了另一门重要的非欧几何，现在称为双椭圆几何。最初黎曼自己和贝尔特拉米（Eugenio Beltrami）认为这门新的几何只适用于某些特定的曲面（例如球的表面，这里大圆看成是“直线”）。但是后来凯莱（Arthur Cayley）和其他受此思想启发的数学家们认为双椭圆几何与高斯、罗巴切夫斯基和J·鲍耶的几何一样，可以描述我们的三维物理空间，直线的定义是它们的根本区别。

在双椭圆几何中直线是无界的但不是无限长的，而且，没有平行直线的概念。由于这门新几何中保留了一些欧氏几何的公理，所以有些定理的叙述是相同的。例如定理“三角形两边及一内角对应相等的两个三角形全等”是新的几何中的一条定理。其他我们熟悉的全等定理也同样成立。然而这门几何中的主要定理异于欧氏几何中的相应定理，也异于高斯，罗巴切夫斯基和J·鲍耶的

几何定理。一条是说，所有具有相同的有限长度的直线交于两点。另一条则是，一条直线上的所有垂线交于一点，三角形的内角和永远大于180°，不过当三角形的面积趋于0时，内角和趋于180°，相似三角形必全等。至于双椭圆几何的适用性，关于先前创立的非欧几何——现在称为双曲几何——的适用性所做的所有讨论，也具有同样的效力*。

所有这些奇怪的几何都可与欧氏几何匹敌，甚至有可能取而代之。这种想法乍听起来很是荒谬，但是高斯接受了这一可能性。无论他是否确实使用了他在1827年的论文中记录的测量方法来检验非欧几何的适用性，他是第一个不仅肯定非欧几何的适用性而且是认识到我们不能确信欧氏几何的真理性的人。他是否受到休谟著作的影响不得而知，而且，他鄙薄康德对休谟的反驳，然而他生活在一个数学法则正在受到挑战的时代，他一定在潜移默化中感受到了这种学术气氛。一种新的学术氛围总是在不知不觉中形成的，要是萨谢利早生100年，也许他也能得出高斯的结论。

最初高斯似乎得出数学中没有真理的结论，在1811年11月21日写给贝塞尔的一封信中他说："我们不该忘记，（复变）函数与其他所有的数学构造一样，只是我们自己的创造物，因此当我们由之开始的定义不再有意义的时候，我们就不应当再问它是什么，而应该问，如何做出合适的假设，使它继续有意义"。但没有人乐意放弃囊中宝物，高斯显然是重新考虑了数学的真理问题并找到了立足的根据。在1817年写给奥伯斯（Heinrich W. M. Olbers）的一封信中，他说："我越来越相信，我们的（欧几里得）几何的（物理）必然性是不可证明的，至少不能靠人的推理能力来证明，人的理性也不需要去证明它。也许来世我们将能获得现在所不具备的对空间本质的一种洞察力。而到那时我们已无需将几何与算术置于同一地位，后者是一种纯粹的先验知识，现在我们

* 后来，F·克莱因指出还有一种基本的非欧几何，其中任意两线交于一点，他将其称为单椭圆几何。　——原注

只能将几何与力学相提并论。”高斯与康德不同，他没有把力学定律视为真理。其实他和大多数人都接受了伽利略的观点，即这些定律是基于经验的。1830 年 4 月 9 日，高斯写信给贝塞尔说：

> 按照我最深的信念，在我们先验的知识中间，空间理论与纯粹算术占有完全不同的地位，在我们关于空间理论的全部知识中，对作为纯粹算术的特征的必然性（即绝对真理）缺少完全的信念，我们还必须谦卑地说，如果数仅仅是我们思维的产物，那么空间在我们的思维之外有其实在性，它的法则我们不能完全先验地规定。

高斯是在说明，真理存在于算术中，因此也存在于建筑在算术之上的代数和分析（微积分及其扩展）中，因为算术的真实性对我们的心智来说是明显的。

欧氏几何是物理空间的几何，是关于空间的真理，这一观念在人们心中如此根深蒂固，以至于在许多年中，与之相悖的任何思想，包括高斯的，都被拒之门外。数学家康托尔（Georg Cantor）曾这样评述这种无知的保守：一旦错误的结论被广泛接受，那么它将不会轻易地被放弃，而且对它懂得越少，则它的地位越牢固。罗巴切夫斯基和 J·鲍耶的著作发表后三十年左右的时间中，除了少数几个数学家外，几乎所有数学家都对其置之不理，它们被视为异端邪说。有些数学家并不否认它们的逻辑上的一致性，另一些则相信它们必定包含着矛盾因而毫无价值。几乎所有的数学家都坚持相信物理空间的几何，必须是欧氏几何。

不幸的是，数学家们已经抛弃了上帝，因此这位“神圣的几何学家”拒绝吐露他是用这些彼此抗衡的几何中的哪一个来设计宇宙的，数学家们只好殚精竭虑以寻求答案。1855 年高斯死后（此时他的声望已无人可比），他的笔记中的材料被公之于众。1868 年黎曼于 1854 年写就的论文的发表使得许多数学家相信，非欧几何也可以是物理空间的几何，我们不能再肯定哪门几何一定是正确的。单是还有别的几何存在就已是一个令人震惊的事实了，然

而更令人震惊的是你不再知道哪个是正确的，或者究竟有没有正确的。显然，数学家们将基于有限的经验显得正确的命题作为公理，并错误地相信了它们是自明的。数学家们陷入了马克·吐温描述的窘境："人是宗教动物，他是唯一具有真正宗教的——他们中的少数人。"

非欧几何及其隐含的关于几何真理性的内容逐渐被数学家们所接受。但并不是由于它的适用性的任何论据被加强了，而是正如普朗克（Max Planck），这位量子力学的奠基人在本世纪初所说的："一个新的科学真理并不是靠说服它的对手并使其看见真理之光取胜，而是由于它的对手死了，新的一代熟悉它的人成长起来了。"

至于说到整个数学的真理，有些数学家赞同高斯的观点，真理存在于数中，它是算术、代数、微积分以及后续学科的基础。当雅可比（Karl Gustav Jacob Jacobi）说："上帝一直在进行算术化"的时候，他并没有像柏拉图那样坚持说上帝永远在进行几何化。

看起来数学家总算设法拯救并且保住了建筑在算术基础之上那一部分数学的真理性，这一部分到1850年时在科学上远比那几门几何使用得更为广泛也更为活跃。不幸的是毁灭性的事情接踵而来，为了理解这些我们必须往回走一点点。

从16世纪开始，数学家们就在使用向量的概念了。一个向量，通常画为一条有向线段，既有方向也有大小（图4.5）。它用来代表力，速度或其他方向和大小都有意义的量。同一平面内的向量可在几何上通过加、减、乘、除的运算而得到一个新的向量。16世纪还引入了形如 $a+bi$ 的复数，其中 $i=\sqrt{-1}$，而 a 和 b 是实数。即使对数学家来说，这些数也是深奥莫测。因此当1800年左右，韦塞尔（Caspar Wessel），阿尔岗（Jean-Robert Argand）和高斯等几个数学家意识到可用平面上的有向线段来表示复数（见图4.6）时，它的表示才变得方便起来。这些人马上看出复数不仅

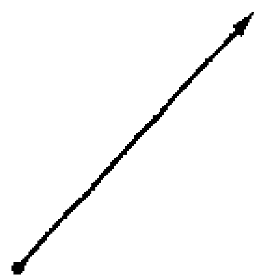


图4.5

可以用来表示平面上的向量，还可以用来表示向量的加、减、乘、除等运算。即，复数被用作为向量的代数，正如整数和小数用来表示商业事务。因此，不需要用几何进行向量运算而只要代数运算就可以了。这样求两个向量 OA 和 OB（图 4.7）的和，根据平行四边形法则作代数运算可得出向量 OC，用复数 $3+2i$ 表示 OA，而用复数 $2+4i$ 表示 OB，其和 $5+6i$ 就表示向量 OC。

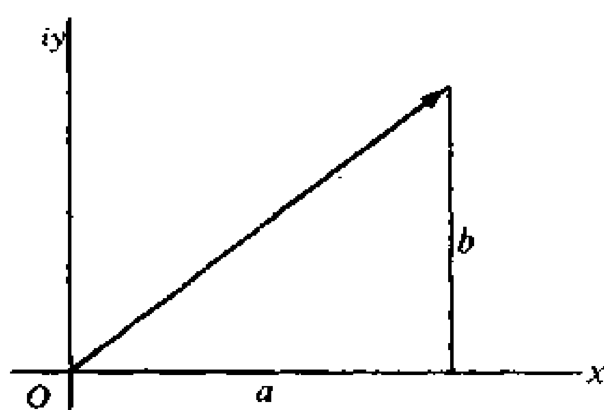


图 4.6

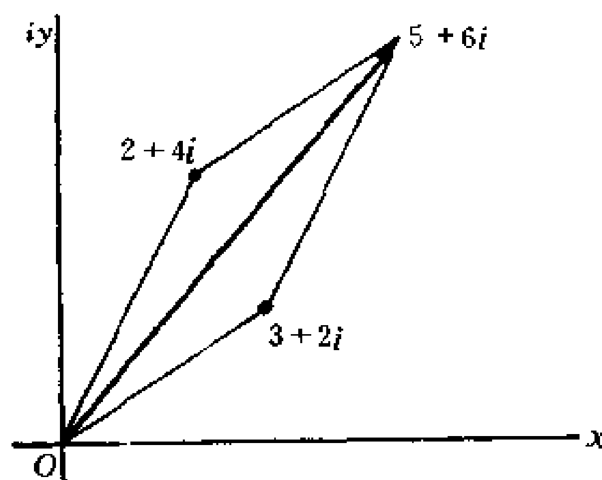


图 4.7

这种用复数来表示平面上的向量及其运算的方法到 1830 年时已经差不多是众所周知的了。然而，如果几个力作用于一个物体，则这些力及其向量表示不一定通常也不会总在同一平面上。如果为了方便起见将通常实数称为一维数，复数为二维数，那么，要用什么来表示空间中某种三维数的向量及其代数运算呢？人们希望对这种三维数进行的运算，类似于复数的情况，将必须包括加、减、乘、除，而且必须满足通常实数和复数所具有的那些性质。这样代数运算才能自由且有效地使用。于是，数学家们开始寻找一种称为三维复数及其代数的数。

有许多数学家从事了这一问题的研究。1843 年，哈密尔顿提出了一个有用的复数的空间类似物，哈密尔顿为此困惑了 15 年。那时数学家们所知道的所有的数都具有乘法的交换性，即 $ab=$

ba，因此哈密尔顿很自然地相信他所找的三维数或三元数，也应该具有这一性质以及其他实数和复数具有的性质。哈密尔顿终于成功了，不过他被迫作出两点让步。首先，他的新数包含四个分量，其次，他不得不牺牲了乘法交换律。这两个特点对代数学来说都是革命性的，他把这种新的数叫做四元数。

复数形为 $a+bi$，其中 $i=\sqrt{-1}$，而四元数则形为

$$a+bi+cj+dk$$

其中 i，j，k 都与 $\sqrt{-1}$ 有相同特性。即

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

两个四元数相等的准则是系数 a、b、c、d 都对应相等。

两个四元数相加只要将对应系数分别相加形成新的系数，这样和本身也是一个四元数。为了定义乘法，哈密尔顿不得不规定 i 与 j，i 与 k 及 j 与 k 的乘积。为了保证乘积是一四元数，并且尽可能多地保留实数和复数的特点，他约定：$jk=i$，$kj=-i$，$ki=j$，$ik=-j$，$ij=k$，$ji=-k$，这些约定意味着乘法是不可能交换的。这样若 p 和 q 为四元数，则 pq 不等于 qp。一个四元数被另一个四元数除也是可以做的，然而，乘法的不可交换性蕴含了用四元数 q 去除四元数 p 时，可以意味着找到 r，使得 $p=qr$ 或 $p=rq$，商 r 在两种情形下可能不等。尽管四元数并没有像哈密尔顿希望的那样有广泛的使用价值，他还是能用它们来解决大量的物理和几何问题。

四元数的引入给了数学家们又一次震动。它是一个确确实实有实际用途的代数，却不具备所有实数和复数都具备的基本性质，即 $ab=ba$。

哈密尔顿发明四元数后不久，从事其他领域研究的数学家们引入了更奇怪的代数。著名代数几何学家凯莱引进了矩阵，它是矩形或正方形数组。对它们也可进行通常的代数运算。但是如同在四元数中的情形一样，它也没有乘法可交换性。而且即使两个矩阵都不为 0，它们的积也可能为 0。四元数和矩阵只不过是许多性质越来越奇怪的代数的先驱。格拉斯曼（Hermann Gunther

Grassmann）发明了许多这样的代数。它们甚至比哈密尔顿的四元数还要一般化。不幸，格拉斯曼只是个中学教师，因此过了许多年他的工作才获得了应有的注意。无论怎样，格拉斯曼工作增添了现在称为超复数的新代数中的多样性。

为了特别的目的而创建的这些新代数本身并没有向普通的算术及其扩展在代数和分析中的真理提出挑战。毕竟，一般的实数和复数可用于完全不同的目的，它们的实用性是无可质疑的。然而，新代数的出现使人们对熟悉的算术和代数中的真理提出了质疑，正如接受了新的文明的习俗的人开始反省他们自己。

对算术真理的最严重的打击来自于亥姆霍兹（Hermann von Helmholtz），他是个卓越的物理学家、数学家和医生。在他的《算与量》（1887年）一书中，他认为数学的主要问题是算术对物理现象的自适应性的证明，他的结论是只有经验能告诉我们算术的法则能用在哪里，我们并不能肯定一条先验公式是否在任何情况下都适用。

亥姆霍兹考虑了许多相关的问题，数的概念本身来自于经验，某些经验启发了通常类型的数：整数、分数和无理数及其性质。对于这些经验，熟悉的数是适用的。我们认识到存在确实相等的物体，因此我们可以说，例如，两头牛。然而，这些物体必须不能消失、混合或分割。一个雨滴与另一个雨滴相加并不能得到两个雨滴。甚至是相等的概念也不能自动地用于经验。看起来如果物体 $a=c$ 而 $b=c$ 则一定有 $a=b$。但是有可能两个音听起来都与第三个音相同，而耳朵却可以区别出前两个音。这里与同一事物相同的事物并不相同，同样地，颜色 a 和 c 看起来都和 b 相同，而 a 和 c 却是有区别的。

还可举出许多例子来说明简单地应用算术可能会导出荒谬的结果。如果你将等体积的两份水混合。一份温度为40°F，另一份为50°F，你并不能得到温度为90°F的两份体积的水。一个频率为100赫兹和另一个200赫兹的单音叠加，得到的并不是频率300赫兹的单音，事实上合成音的频率还是100赫兹。电路中两个大

小分别为 R_1 和 R_2 的电阻并联，它们的等效电阻是 $R_1R_2/(R_1+R_2)$。正如勒贝格（Henri Lebesgue）所调侃的，你把一头狮子和一只兔子关在同一个笼子里，最后笼子里绝不会还有两只动物。

我们在化学中知道，将氢和氧混合就得到水。但是如果将两体积的氢和一体积的氧混合得到的不是三体积而是两体积的水蒸气。同样，一体积氮气和三体积氢气作用生成两体积氨气。我们碰巧知道这些令人惊讶的算术事实的物理解释。根据阿伏伽德罗假设，同一温度、同一压强下，体积相同的任何气体所含分子数相同。这样，如果给定体积的氧气含有 10 个分子，则两倍这一体积的氢气含有 20 个分子。碰巧氧气和氢气都是双原子分子，即每个分子由两个原子组成。这 20 个双原子氢分子中的每个都与 10 个氧分子中的一个原子结合从而得到 20 个水分子，即两体积的水蒸气而不是三体积。由此可以看出算术不能正确描述按体积混合气体的结果。

一般来说，算术也不能正确反映按体积混合液体的结果。一夸脱的杜松子酒与一夸脱苦艾酒混合，得到的不是两夸脱混合物而是稍微少一些。一夸脱酒精与一夸脱水混合得到大约 1.8 夸脱的伏特加。对于大多数酒类这一点都是正确的。三茶匙水加上一茶匙盐不会是四茶匙。有些化学混合物不仅不按体积增加，还会爆炸。

不仅是整数的性质在许多物理情况下不成立，许多实际情况中还要用到不同的分数计算。让我们以棒球为例来考虑（这当然是上百万美国人所感兴趣的问题）。

假设一个运动员在一场比赛中击球 3 次，在另一场比赛中击球 4 次，那么他总共击了几次球？这没有什么困难，他一共击球 7 次。假设他在第一场比赛中有 2 次击球成功，即到达第一垒或更远，在第二场中成功 3 次，两场比赛中他一共成功几次呢？这也没有什么困难，一共是 5 次。然而，观众和对手本人通常最感兴趣的是平均击中率，也就是击中次数与击球次数的比例。在第一场中比例是 2/3，第二场中是 3/4。假设该球手或者一个棒球迷想

用这两个比例来计算两次比赛的平均击中率，可能有人会以为用通常分数相加的办法就可以了，即

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{17}{12}.$$

这个结果当然是很荒谬的，他不可能在12次机会中击中17次。显然，通常将两次比赛的平均击中率相加来得到两次比赛的平均击中率的办法是行不通的。

我们怎样才能由两次比赛各自的平均击中率求得这两次比赛的平均击中率呢?答案是用一种新的分数加法。我们知道联合的平均击中率是5/7，而单场比赛的击中率分别是2/3和3/4，我们看到如果把分子和分母对应相加得到新的分数，这就是正确答案，即

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{5}{7},$$

假设这个加号意味着分子相加和分母相加。

这种分数加法在其他情况下也是有用的。一个借助电话搞推销的商人在第一天的五个推销电话中成功了三次，第二天七次成功了四次，他把这些记录下来。为了得到正确的成功率，他必须把3/5和4/7按平均击中率的那种方法计算，这两天中他的记录是在总共12个电话中成功了7次，这样7/12就是3/5+4/7，假设加号意味着分子相加和分母相加。

再举一个更为一般的例子。假设一辆汽车用2小时走了50英里，用3小时走了100英里，那么两次旅行的平均速度是多少呢?你可以说这辆车用5个小时走了150英里。因此它的平均速度是每小时30英里。然而，分别计算每次的平均速度通常总是有用的。第一次旅行的平均速度是50/2，第二次是100/3，如果将这两个分数的分子相加、分母相加，则也得到正确答案。

一般来说4/6=2/3，然而在上面讨论的分数相加中，例如2/3+3/5，就不能用4/6代换2/3。因为前者结果为7/11，后者则为5/8，而这两个答案并不相等。更进一步，在通常的算术中，5/1和7/1就像整数5和7一样，在我们的新算术中，将5/1和7/1

作为分数求和，我们得到的是 12/2，而不是 12/1。

这些可以称之为棒球算术的例子确实说明可以引进与以前我们熟悉的运算不同的运算，这样就创造了一个实用的算术。事实上也确实存在许多其他的算术，然而，一个真正的数学家绝不会凭一时的兴致去发明一种代数。一种代数总是为了表示一类物理世界的现象而创造的，正像我们上面的分数加法适用于两次击球平均率的合成。我们可以通过定义适合于这类物理现象的运算很方便地对物理世界发生的事情进行研究。只有经验能告诉我们普通的算术何处可应用于给定的物理现象，这样就不能说算术是一定适用于物理现象的一个真理体系。当然，由于代数和分析是算术的延伸，它们也不是真理体系。

因此，数学家们只能得出这个令人沮丧的结论：数学中没有真理，即作为现实世界普适法则意义上的真理。算术和几何基本结构的公理是受经验启发得出的，因而这些结构的适用性是有限的，它们在哪里是适用的只能由经验来决定。希腊人试图从几条自明的真理出发和仅仅使用演绎的证明方法来保证数学的真实性被证明是徒劳的。

对许多富有思想的数学家来说，数学不是一个真理体系这一事实实在是难以接受。似乎上帝想用多种几何和代数来使他们困惑，正如他曾用不同的语言困惑了建筑巴别塔*的人们那样。因此他们拒绝接受这些新的发明。

哈密尔顿毫无疑问是一位杰出的数学家，在 1837 年他表达了他对非欧几何的不满：

> 没有哪一个坦白的、有智力的人会怀疑两千年前欧几里得在他的《几何原本》中提出的平行线的主要性质，尽管他可能会希望看到它们以更明确更

* 这是《圣经》中的一个故事：从前，世界上所有的人都说一种语言。他们打算在巴比伦王国建造一座通天塔。在塔快建成时，上帝发现了，他把人们分配到世界各地，搞混他们的语言，于是人们不得不停止建造这座塔。——译注

好的方式来叙述。这些性质中没有任何令人费解或含混不清之处，没有任何你可以怀疑的地方，虽然可以经常动动脑筋改进它们的表达方式。

凯莱在1883年就任英国科学促进协会主席的演说词中强调：

我本人的观点是欧几里得的第十二公理（通常称之第五公理或平行公理）的普莱费尔形式不需要证明，它是我们的空间概念的一部分。这里指的是我们经验中的物理空间——我们通过经验来了解这个空间。但它的表示是建立在所有外部经验基础之上的……注意到欧氏空间长期以来一直被当作是我们经验的物理空间，所以几何学的命题对于欧氏空间不仅仅是近似的真实的，而且是绝对真实的。

F·克莱因(Felix Klein)，近代的一个真正伟大的数学家，表达了差不多是同样的观点。尽管凯莱和F·克莱因本人都从事过非欧几何工作，他们却把非欧几何看作是在欧氏几何中引入人为的新的距离函数时产生的奇异结果。他们拒绝承认非欧几何和欧氏几何一样基本和实用，他们的立场在相对论时代以前看来还是无懈可击的。

罗素也相信数学的真实性，尽管他在某种程度上限制了这种真实性。上个世纪90年代他提出了这样的问题：空间的哪些性质对经验是必需的，而且是由经验假定了的。也就是说，如果在这些先验性质中有任何一条被否定，那么经验就变得毫无意义了。他在《关于几何基础的随笔》(1897年)中，赞同欧氏几何不是一门先验知识这一见解。他断言，就一切几何学来说，倒不如认为射影几何*是先验的。这个结论在1900年前后，从射影几何的重要

* 射影几何研究的是一个平面上的图像投影到另一个平面上时所得图像的公共性质。如果在一个手电筒前放置一个圆，那么在屏幕或墙上就会看到它的影子。影子的形状随着圆偏离或趋近垂直方向而发生改变。而圆及其各种不同的形状有着相同的几何性质。 ——原注

性的观点来看，是可以理解的。然后他就把欧氏几何和一切非欧几何所共有的公理，当作先验的东西添加到射影几何中去，加进去的那些东西（空间的齐次性，维数的有穷性以及距离的概念）使得度量成为可能。罗素还指出，定性的考虑必须在定量考虑之前，而这一观点加强了射影几何的先验性。

至于说到度量几何，即欧氏几何和几种非欧几何，它们可以由射影几何通过引入某个特定的度量概念而导出，这一事实罗素认为只不过是一种技术上的成就而没有什么哲学意义。无论如何，它们持有的那些特殊定理并不是先验的。在对待这几种基本的度量几何上，罗素不同于凯莱和克莱因。他认为它们都处于同等的逻辑地位，因为具备上面那些性质的度量空间只有欧氏空间、双曲空间的和单、双椭圆空间，所以罗素认为所有可能的度量空间只有这几种，而欧氏空间则当然是仅有的确实可用的空间，其他那些空间在证明可能存在别的几何学时，有其哲学上的重要性。现在我们回过头来看，可以说罗素无非是用一种射影癖代替了欧几里得癖。罗素多年以后承认，他的《随笔》是他年轻时代的一部著作，其观点是无法站得住脚的。然而我们后面将会看到，他和其他人为了建立算术的真实性而确立了一个新的基础（见第十章）。

数学家对某种基础的真理的执著探索是可以理解的。多少世纪以来，用数学去描述和预测物理现象一直取得辉煌的成功，这使得任何人，尤其是那些被他们自己的发明陶醉得飘飘然的人来说，要他们接受“数学并不是一堆天然的钻石，而不过是人工宝石”这一事实的确是很难的。然而数学家们还是逐渐开始承认，数学公理和定理并不一定是物理世界的真理。某些领域的经验启发特定的公理，在这些领域，这些公理及其逻辑结果能够非常精确地作有价值的描述。但是，一旦这一领域扩展了，这种适用性就可能会失去。就对物理世界的研究而言，算术仅仅提供了理论或者模型，而当经验或实践证明一种新的理论能比旧理论提供更加一致的描述时，新的数学理论就取代了旧的理论。1921 年爱因斯

坦给出了关于数学与物理世界的关系的精采的叙述：

> 只要数学的命题是涉及实在的，它们就不是可靠的；只要它们是可靠的，它们就不涉及实在。……但是，另一方面，作为一般情况的数学和作为特殊情况中的几何，它们的存在是由于我们需要了解真实客体的一些性质。

既然数学家们已经放弃了上帝，他们就应该相信人，而这正是他们所做的。他们继续发展数学和探索自然法则，他们知道自己所阐明的并非是上帝的设计而是人的工作。昔日的成功使他们对正在进行的工作充满信心，而且幸运之神总是欣然来到。使数学永远充满活力的灵丹妙药是它自己调配的——在天体力学、声学、流体力学、光学、电磁理论和工程中取得的巨大成就，以及其预言的难以置信的准确程度，一定有某种原始的也许是魔力蕴含其中，才能使得一门学科尽管是在战无不胜的真理之旗下发展，还是凭着它内在的神奇力量确实达到了自己辉煌的顶点（见第十五章）。于是，数学的发明和在科学中的应用得以更快的步伐前进。

数学并不是一个真理体系这一认识确实振聋发聩。让我们首先看一个数学作用于科学的结果。从伽利略时代开始，科学家们就认识到，科学中的基本原理与数学原理相反，必须来源于实践。尽管两个多世纪的时间里他们相信他们所发现的是自然界的设计之中所固有的，但是到了 19 世纪初他们认识到科学定理并不是真理，甚至数学的原理也是来源于经验而且并不能肯定它们的真实性。这一认识使科学家们意识到只要他们使用数学的公理和定理，他们的理论就更加脆弱。自然法则是人的创造物，是我们，而不是上帝，才是宇宙的法则制定者。自然法则是人的描述而不是上帝的命令。

这场灾难的影响几乎涉及了我们文化的所有领域。在数学和数学物理中貌似真理的成就使人们期望也能获得所有其他知识领域中的真理。笛卡尔在 1637 年的《方法谈》中表达了这种期望：

> 这一长串的推理简单而又容易，几何学家正是

> 用它来达到那些更难证明的定理。这使我想到，凡人的认识所及的事情也许会与此情况相同，只要我们拒绝接受那不真的事情为真，并且遵守必要的演绎程序从一个结论推到其他，那就不会有什么遥远而我们不能达到的事情，也没有什么因为深奥而不能为我们揭示的事情了。

笛卡尔写这些话的时候数学探究的成功还很少。到18世纪中叶数学成就如此巨大而深远，知识界的领袖人物都深信，他们能够通过应用推理和数学找到所有领域中的真理。达兰贝尔这样评价他的时代：

> ……宇宙的奇观激起我们某种思想的升华……带来了生气勃勃的各种思潮。这种活跃的思潮尤如冲破了堤岸的河水，传播到自然界的各个方面，以势不可挡之势冲击着现有的一切事物和它们一直以来存在的方式。从一般科学的原理到宗教启示的基础，从哲学问题到欣赏志趣，从音乐到道德，从神学家们故弄玄虚的争辩到贸易问题，从贵族的法律到平民的法律，从自然法则到国家专政的律法……一切事物都被讨论和分析，或者至少被人们提及。

所有领域中的真理都将被数学不是真理这个认识动摇了。人们可能仍然希望或者相信能够找到政治、伦理、宗教、经济和其他诸领域中的真理，然而这种希望的最有力的支持没有了。数学向世界证明了人能获得真理，然后又毁掉了这个证明。正是非欧几何和四元数这两个推理的重大胜利导致了这场灾难。

正如W·詹姆斯所说："人的智力生命几乎完全取决于他的理性知识取代其感性知识的程度，我们的经验正是来自于这样的感性知识。"而这种理性知识并不是感性知识的真实表述。

人的精神支柱、推理框架以及所有已建立的思想权威都随真理的丧失而失去了，"人类推理的骄傲"随着真理大厦的坍塌而崩溃了。历史的教训是，我们最坚定的信念不是凭主观所作出的论

断。事实上它们是最不可信的，它们标示的不是我们的成功而是我们的局限性。

对数学真理信仰的历史可以用华兹华斯的“永恒的暗示”来做最好的总结。1750年数学家们可以这样夸耀他们的发明：

沐浴着上帝的光芒，

我们走向四面八方。

到了1850年，他们不得不沮丧地承认，

不管我走到哪里，

尘世中这条路已不再荣光。

但是这段历史并不会令人失望。伽罗瓦这样评论数学：“（这门）科学是人的心智的工作，它注定要去探索而不是知道，去追求真理而不是发现真理。”也许真理本质上就是难以捉摸的，或者如罗马哲学家塞涅卡（Lucius Seneca）所说：“自然界不会一下子披露她所有的秘密。”

第五章　一门逻辑学科不合逻辑的发展

我们将不会悲伤，
在隐藏着的背后
我们找到的是力量。

——华兹华斯

两千多年来，数学家们一直相信他们已十分成功地揭示了自然的数学设计，然而现在他们却不得不承认数学定律并非真理。在这两千年里数学家们还认为他们一直遵循着古希腊人的方法来得到真理，即将演绎法推理应用于数学公理中，从而确保推论与公理一样可靠。而正由于科学的数学定律相当准确，少数几个对某些数学论点正确性的疑惑虽然确实存在，但也不被理睬。即使最敏锐的数学家也确信推理上的任何瑕疵是很容易去除的。然而，数学家们在推理上的这种安然心态，却在19世纪有了改变。

数学家们睁开双眼，他们看到了什么？他们又是如何认识到他们并没有合理地进行推理的呢？在19世纪上叶，对微积分的合

理性的攻击并没有遭到令人满意的反击，这已动摇了一些人。但最主要的是由于在原理上很类似的非欧几何和四元数的发明，迫使数学家们放弃了他们对真理的追求，并使大多数科学家看到了这一逻辑所处的可悲状况。

对非欧几何的研究是不断地参照欧氏几何里类似的定理和证明的，这是十分自然的，同时也产生了令人吃惊的意外发现：两千年来一直为专家们所称誉的严格证明的典范——欧氏几何竟然是建立在一个有着严重缺陷的逻辑基础之上的。以四元数开始的新代数学（见第四章）的产生，困扰着数学家们，并迫使他们不得不重新检查普通实数和复数的算术和代数学的逻辑基础，但他们的目的仅仅只是想重新使他们自己相信，这些数的性质是十分牢靠的。然而，在这一领域的发现却令人吃惊：他们曾一直认为是高度逻辑化的科学实际上完全是不合逻辑地发展着的。

反省过去是洞察力最丰富的源泉。正是这些新发现所提供和磨砺的洞察力，使科学家们最终看到了前人所没有看到的，或者是看到了，却因他们那种想达到真理的冲动欲望而掩饰了的东西。当然，数学家们并不是要放弃他们的科学。数学，除了一直在科学中发挥着巨大的作用以外，它本身即是一种知识体系。自柏拉图以后，许多数学家都把它当作是一种超感觉的实在，因此，他们认为能够做的仅仅是重新检查一下数学的逻辑结构，并且补充或重新构造那些有缺陷的部分。

我们知道，演绎数学起源于古希腊，其第一个似乎十分合理的结构是欧几里得的《原本》。欧几里得是以定义公理和演绎得到的定理开始的，让我们先来看看欧几里得的几个定义：

定义 1. 点是没有部分的那种东西；

定义 2. 线（现在的术语称为曲线）是没有宽度的长度；

定义 3. 直线是同一线上各点平齐的线。

亚里士多德指出：对某一概念的定义必须用已知的概念来描述，因为不可能有无源之水。所以他断言，必然有未定义的概念做为开始。尽管许多迹象表明公元前 300 年左右生活在亚历山大

里亚的欧几里得十分清楚古希腊人以及亚里士多德的学说，但他仍然定义了他所有的概念。

对于这一缺陷有两种可能的解释，一种可能是欧几里得未必赞同必须有未定义概念；另一种可能是像他的一些支持者所说的，他意识到了一定会存在未定义概念。他只是希望，他的原始定义能给出它们所定义的概念的直观意义，由此即可判断他们所遵循的公理是否正确的了。然而，即使是后一种情况，欧几里得也不应该把这些定义放到他的正文中去。但无论欧几里得的目的是什么，实际上从他以后，两千多年来追随他的数学家们都无一例外地忽略了未定义概念的必需性。帕斯卡曾在《几何精神论》(1658年)中要求人们注意这种必需性，但他的提醒并未被人们所理睬。

欧几里得的公理是一种什么样的情况呢？他可能是依据亚里士多德的观点，阐述了五条可普遍应用于推理的公理，和五条仅用于几何学的公设。第一条公理是说，等同于同一事物的事物彼此相等。欧几里得把“事物”这个词解释为长度、面积、体积和整数。当然，“事物”一词未免过于模糊。另一个使人误入歧途的公理是这样的：彼此重合的事物是相等的。他运用这一原理证明两个三角形全等，因为他认为通过将一个三角形放在另一个三角形之上，加上另外一些给定的条件，可以发现这两个三角形是一致的。但是，在将一个三角形放在另一个三角形上面的过程中他必须移动这个三角形，而在这一过程中他假定了运动中三角形不改变性质。实际上这个公理就是说，我们所处的空间是各向同性的，也就是说，无论放在哪，图形的性质始终不变。这或许是一个合理的假设，但却是一个额外的假设。除此之外，运动的概念定义中也没有涉及到。

另外，欧几里得还运用了大量他没有阐述的公理。高斯注意到这样一个现象，欧几里得提到了位于其他点之间的点和位于其他线之间的线，但是他却没有解释“位于之间”这个概念和它的性质。显然，欧几里得将他头脑中的几何图形引入了他的推理并取代了实际图形所具有的特性，但是并没有在公理中体现出来。图

形是一种帮助思考和记忆的手段，但它不能做为推理的基础。欧几里得还用到了另外一个没有明确提出的公理，涉及到专业上称为连续性的问题。莱布尼茨注意到了这一点。欧几里得用到了这样一个事实：A，B 两点分别位于线 l 的两侧（图 5.1），连接 A，B 两点的线必然和 l 有一个公共点。在图上当然是很明显的，但是并没有任何公理能够保证这个公共点必然存在。我们甚至不能说线 l 的两侧，因为这也需要公理作为保证。

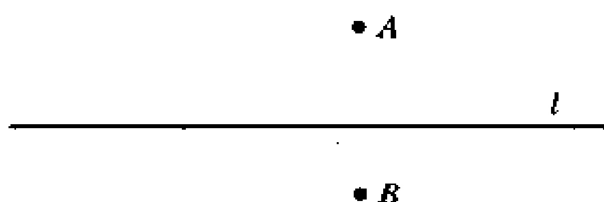


图 5.1

除了定义和公理方面的缺陷外，《原本》一书还有许多不完全的证明。一些定理的证明也是错误的，另外一些则仅能证明定理所断言的某一特殊情形或某一特殊构造。后一种缺点相对来说比较小，因而容易补救。欧几里得自以为对不严密的作图给出了精确的证明，但是当人们从整体上看待欧几里得的工作时，却又发现他实际上是对精确的作图给出了不严密的证明。简而言之，欧几里得的著作有着糟糕之极的缺陷。

尽管《原本》一书存在如此众多的缺点，但在 1800 年以前，最优秀的数学家，科学家和哲学家却把它作为严格证明的理想典范。在他的《思想录》一书中，帕斯卡说道："几何的精神实质胜于一切能进行完美分析的学科。它从公理入手得到推论，而推论的正确性可以由普适的逻辑规律所论证。"巴罗，牛顿在剑桥大学的老师，也是他的前任，列出了八条理由说明几何的确定性：概念清晰；定义明确；我们的直觉保证了其公理的普遍正确性；公理浅显易懂，且易于想见；公理少；大量定理的可接受性；流畅的论证次序；以及回避掉了一些未知的事物。像这样的鉴定书还可以列出许多，直到 1873 年，还有一位著名的数论学家，亨利·史密斯（Henry，J. S. Smith）这样说道："假如几何不严密，那

它就什么也不是……。在严密性这一点上，得到普遍首肯的欧几里得的方法是无懈可击的。”

然而，对非欧几何的研究却揭露了欧氏几何许多的缺陷，人们不再崇拜欧氏几何逻辑的完美了。非欧几何正是导致欧氏几何之船倾覆的暗礁。曾经被确信是坚实的土地，如今却被证明是一片沼泽。

欧氏几何当然只是数学的一部分，自1700年以来，关于数字的数学成为数学的主要部分。让我们看看数字的逻辑发展是如何进行的吧。古埃及人和巴比伦人早已使用了整数、分数，甚至像$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$这样的无理数，在实际应用中他们使用无理数的近似值。但是，因为他们的数学，甚至包括公元前4世纪以前的古希腊人的数学是建立在直觉和经验的基础之上的，因而无法褒贬他们的逻辑结构。

我们知道，对整数的逻辑处理始见于欧几里得《原本》的第七篇、第八篇和第九篇。在这几篇中，欧几里得给出了如下定义：单位元是指借助于它，我们可以把诸多存在的事物中的每一个称作为一，一个数则是由多个单位元的合成。显然，这是不充分的，更不用说，他在这里同样也忽视了需要未定义概念这一事实了。在推导整数的过程中，欧几里得继续运用了上面提到的公理，不幸的是，他的一些证明也是错误的。但是，古希腊人和他们的子嗣们却坚信整数的理论有一个令人满意的逻辑基础做后盾。他们甚至毫不费力地谈到整数的比例，后人称之为分数。然而比例的概念也是没有定义的。

但是，在数的逻辑发展中，希腊人却的确遇到了一个他们无法克服的困难。我们知道，公元前5世纪的毕达哥拉斯学派最早强调了整数和整数的比例在自然研究中的重要性，他们坚持认为整数是度量一切事物的“尺子”。当他们发现一些无法用整数表达的比值时，例如等腰直角三角形的斜边和一腰的比，感到惊讶而又迷惑。他们把那些可以用整数表达的比称为可公度比，那些不能这样表达的，则称为不可公度比。这就是为什么我们把无理数

$\sqrt{2}$称作不可公度比的原因。不可公度比的发现归功于米太旁登的希帕苏斯（Hippasus），有关他的一个故事是这样的：毕达哥拉斯派的信徒正在海上，他们把希帕苏斯从甲板上扔了出去，因为他在宇宙间弄出了一个与毕达哥拉斯的教义相悖的元素。这种教义认为，宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数的比。

毕达哥拉斯派证明了$\sqrt{2}$和1是不能公度的，即$\sqrt{2}$是无理数。他们采用了亚里士多德所说的归谬法，即间接证明法。这一证明指出，如果等腰直角三角形的斜边与一腰可公度，则同一个数将既为奇数又为偶数，显然，这是站不住脚的。证明过程如下：设斜边和腰的比为a/b，其中a，b均为整数，并且，若a和b有公共因子则约去。设$a/b=\sqrt{2}$，则$a^2=2b^2$，由于a^2是偶数，a必然也是偶数，因任一奇数的平方必为奇数*，而比a/b是最简形式，a是偶数，b必是奇数，既然a为偶数，故可设$a=2c$，则$a^2=4c^2$，又因为$a^2=2b^2$，则$4c^2=2b^2$，即$2c^2=b^2$，所以b^2是偶数。若b是奇数，则b^2为奇数，因此b为偶数，但同时b是奇数，因而产生了矛盾。

毕达哥拉斯派门徒和古希腊人普遍不愿接受无理数，因为无理数的概念的理解使他们困惑。毕达哥拉斯派的证明指出，$\sqrt{2}$不是整数的比，但并没有指出无理数是什么，他们肯定不知道他们的小数近似值不可能得到精确值。人们也许会赞赏他们的大胆精神，但数学家绝不会。古希腊人具有与众不同的智力结构，他们不满足于近似。

无理数的发现，提出了一个问题，这成了希腊数学关注的焦点。柏拉图在《规律》一书中呼吁关于不可公度数的知识。这个问题被欧多克斯所解决，他曾经是柏拉图的学生。他把所有的量从几何角度加以考虑，如果都用数字表示的话，在长度、角度、面积和体积中都会产生一些无理数，因而可用几何的方法进行处理。

---

* 任一奇数可表示为$2n+1$，n为整数，则$(2n+1)^2=4n^2+4n+1$，此数必为奇数。
——原注

例如，欧几里得用以下的形式来表述毕达哥拉斯定理：直角三角形斜边的平方等于两直角边的平方和，通过求平方的和他表述了这样一个意思：在几何上，两块面积的和等于以斜边为边的正方形面积，求助几何的方法很容易被人们所理解。当 1 和 $\sqrt{2}$ 被当作是长度，也就是线段时，它们之间就没有什么区别了。

无理数带来的问题要比上面所说的只是用数字表示长度、面积和体积所带来的问题大得多。因为二次方程，例如 $x^2-2=0$ 的根，极有可能是无理数，所以古希腊人用几何的方法来解方程，这样方程的根就可以看作是线段，并且回避了使用无理数。这一发展被称之为几何代数学，而欧几里得的《原本》正是代数与几何的汇集。

除了整数理论外的所有的数学向几何学的转换导致了几个重大的结果。一是它将数和几何彻底地分开，因为只有几何才能解决不可公度比的问题。从欧几里得以后，数学的这两个分支被严格地区分开。同时，由于几何包容了数学的大部分内容，它成为了几乎所有“严格”数学的基础，这种状况至少持续到了 1600 年。我们现在仍把 x^2 称为 x 的平方，把 x^3 称为 x 的立方，而不说 x 的二次方或 x 的三次方，因为普遍的量 x^2 和 x^3 曾仅仅只有几何意义。

用几何方法来表示数和对数进行运算当然是不切实际的，也许把 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ 视为一矩形的面积在逻辑上是令人满意的，但当我们想知道这一乘积的数字表示时，显然这一方法就不够用了。对于科学和工程学来说，几何图形远远没有数字结果那么有用，数字结果在任何需要小数处理的地方都能计算出来。应用科学和工程学必须是定量的，当一艘船想知道它在海上的位置时，它必须知道数字的结果，用纬度和经度来表示。要高效地建造房屋、桥梁、船只和堤坝，我们必须知道所用到的长度、面积以及体积的定量的测量值，这样每一部分才能很好地结合在一起；事实上这些定量的数据必须在建造前知道。但是古希腊人却认为准确的推导具有无上的重要性，他们反对数学在商业、航海、建筑和历法

推算中的应用，而对他们自已用几何解决无理数困境的方法感到十分满意。

继古希腊文化后，约在公元前300年产生了亚历山大里亚希腊文化（见第一章）。这是古典希腊文化、埃及文化和巴比伦文化的混合体，从逻辑发展的观点来看，它产生了一种演绎学和经验数学奇妙的混合物。其主要的数学家阿基米得与阿波罗纽斯，着手于欧几里得《原本》中的公理化的演绎几何，甚至在他的力学论文中，阿基米得也是从公理着手证明定理。但是受埃及人和巴比伦人实用观念的影响，亚历山大里亚人将数学投入应用中去，我们可以发现，在亚历山大里亚时期出现了许多对长度、面积以及体积进行定量测量的公式。亚历山大里亚的埃及工程师海伦在他的《量度》一书中给出了一个求三角形面积的公式：

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

这里，a、b，c 分别为三边长，s 是周长的一半，这个式子给出的值常常是个无理数。这个特殊的公式是很了不起的，古希腊人认为三个以上的数的乘积是没有意义的，因为这一乘积没有任何几何意义，而海伦却没有这一种顾虑。在亚历山大里亚希腊人发展的许多纯科学和应用科学中，如历法推算、时间测量、航海、数学、光学、地理学、气体动力学和流体静力学（见第一章）中，无理数被人们随意地使用。

亚历山大里亚人最突出的成就是由喜帕恰斯和托勒密建立的定量的天文学，这一以地球为中心的天文学使人们可以预测行星、太阳及球的运动（见第一章）。为了发展这门定量的天文学，喜帕恰斯和托勒密创立了三角学。数学的这个分支使人们可以通过三角形已知部分的信息求出未知的部分。托勒密解决三角问题的方法与现在有所不同，他必须计算圆的弦长。尽管他在建立其有关弦之间的关系的基本结论时采用了演绎几何的方法，而紧跟着却用了算术和代数的方法计算弦长，而这恰恰是他最终关心的东西。大部分弦是无理数，托勒密对得到有理数的近似值感到满意，而他在研究的过程中却从未对使用无理数有过丝毫犹豫。

亚历山大里亚希腊人自由地使用从埃及人和巴比伦人那里继承来的、没有逻辑基础的算术和代数。托勒密和其他亚历山大里亚希腊人普遍持有埃及人和巴比伦人的态度，即不加批判地使用类似π，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$之类的无理数，并且在需要的地方就取近似值。例如，无理数的一个最著名的应用就是阿基米得计算出π在$3\frac{1}{17}$和$3\frac{10}{71}$之间。无论他是否知道π是无理数，为了得到这一近似值他计算了所有他确信其根为无理数的数的平方根。

从现今的角度出发，和自由使用无理数同样值得注意的就是埃及和巴比伦代数独立于几何的复兴。其杰出代表是海伦和另一个亚历山大里亚希腊人丢番图。他们都将算术和代数独立处理，而不依靠几何引出或依靠几何做为逻辑依据。海伦完全是采用算术的过程，用公式表述或解决代数问题。例如，他处理这样一个问题：给定一个正方形，其面积和周长的和为 896 英尺，求边长。为解决所论的这一二次方程式，海伦在式子两边同时加上 4，配成完全平方，再求平方根，他没有证明而只是描述了怎么做，在海伦的著作中这样的问题还有许多。

在《几何》一书中，海伦提到了加上面积、周长和直径这样的话，他这么说的意思自然是指加上它们的数值。同样，当他说一块面积乘一块面积时也是指两个数值的乘积。海伦还将许多古希腊几何代数法翻译成为算术和代数过程。他和他的继承者们的一些问题，恰恰是曾在公元前 2000 年巴比伦人和埃及人的文本中出现过的。希腊代数著作是用文字的形式写下来的，并没有任何符号，也没有给出任何过程的证明。从海伦以后，那些导出方程的问题，又成为了一般形式的迷题了。

亚历山大里亚时期的希腊代数在丢番图时达到高峰，关于他的生平我们几乎一无所知。他的著作虽然远远超过了与他同时代的人，但可惜出来得太晚，而没能给他们那个时代带来太大的影响，因为一股毁灭性的浪潮（见第二章）已经开始吞噬这一文明。丢番图写过几本现已全部失传的书，现在我们还能看到他的巨著

《算术》中的第六篇。据丢番图说，这本书共有十三篇。《算术》和埃及的莎草纸文稿一样，是个别问题的汇集，在题献中说这是一本帮助他的一个学生学习这门学科而写的练习集。

丢番图走出的重要一步是在代数中引入了一些符号，由于我们看到的都是13世纪以后很晚的一些本子，而不是他的亲笔手稿，所以无法知道确切的符号，但他的确用到了一些相当于我们现在的x，x^2到x^6的幂和$1/x$之类的符号。符号的出现自然是一件了不起的事，但使用三次以上的高次幂更为非凡，因为正如我们刚才提到的那样，对于古希腊人，含有三个以上的因子的乘积是没有任何意义的，但在纯算术的基础上这个乘积却是有意义的。丢番图所采用的正是这样一个基础。

丢番图的解题步骤是像我们写散文那样逐字地写的，他的运算是纯算术的，即不借助于几何来说明或证实他的结论。因而$(x-1)(x-2)$也是像我们今天一样用代数方法解出，他还使用了像$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$这样的或是更为复杂的代数恒等式。严格地说，他采取了应用恒等式的步骤，但是这些恒等式本身并没有出现。

丢番图代数的另一个非同寻常之处，是他对不定方程的解决。例如：在一方程中有两个未知数，在先前毕达哥拉斯派关于$x^2+y^2=z^2$的整数解法和其他著作中，这种方程都曾被考虑过。丢番图则对此进行了广泛的研究，他成为了这门代数分支学科的创立人，而现在人们确实把这门学科称为丢番图分析。

尽管丢番图在其代数的应用上卓有声誉，但他只承认正的有理根，而对其他所有根都置之不理。甚至当一元二次方程式有两个正的有理根时，他也只给出较大的一个。当方程很明显将解出两个负根或是无理根或虚根时，他就放弃这一方程式并认为这一方程是不可解的。在有无理根情况下，他就折回去重算并说明如何通过改变方程来得到一个存在有理根的新方程。这一点上丢番图与海伦和阿基米得有所区别。海伦是一个工程师，他求得的量可能是无理数，因此，他接受了这些数，而为了得出有用的数值，

便取近似值。阿基米得也寻求准确解，当这些解是无理数时，他就用不等式来限定其范围。我们并不知道丢番图是如何获得他的方法的，他没有借助于几何，因此，他不大可能是将欧几里得的方法进行转化来解二次方程。另外，不定问题没有在欧几里得的理论中出现，而在丢番图的学说中成为一个新的类别。因为我们对亚历山大里亚时期后期的思想的连续性了解甚少，所以在丢番图之前的希腊人著作里，我们找不出多少丢番图研究工作的痕迹。实际上，他的方法和巴比伦的方法更加接近，有一些含糊的迹象表明他的方法受到巴比伦人的影响。但和巴比伦人不同的是，他采用了符号表示法并着手进行不定方程的求解。从整体上说，他的工作是代数学上的一座里程碑。

就算术和代数来说，海伦和丢番图，阿基米得和托勒密的著作读起来就像埃及人和巴比伦的程序化的课本，只告诉我们如何去做。欧几里得、阿波罗纽斯和阿基米得几何的那种有条不紊的演绎证明全然不见了。所解的问题，都是归纳性质的，就是说他们所指明的解具体问题的方法，虽或能应用于一般性的一类问题，但并未规定应用的范围能有多广。各种不同类型的数，整数、分数和无理数（除了欧几里得关于整数的不完善的工作外）都没有确切的定义，也没有一套公理基础来建立演绎结构。

因此，古希腊人留给后人两门截然不同的、发展得不一样的数学分支。一方面是演绎的、系统的、但有些缺陷的几何，另一方面则是经验算术及其延展代数。考虑到古希腊人要求由清晰的公理基础推论得到数学结果这样一个事实，而独立的算术和代数却没有它自己的逻辑结构，因此其出现成了数学史上一个巨大的反常现象。

在阿拉伯人最终毁灭了亚历山大里亚希腊文明以后，印度人和阿拉伯人成为数学的执牛耳者。他们愈发违背了古希腊的数学概念。他们当然应用了整数和分数，另外，他们也毫不犹豫地使用了无理数。实际上，他们引入了一种全新而正确的加减乘除无理数的法则。既然这些法则并没有一个逻辑基础，那它们是如何

被制定出来，又如何知道其正确与否呢？答案是印度人和阿拉伯人用类推法推导出这些法则。法则 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ 对所有的 a 和 b 都是成立的，因为很明显 $\sqrt{36}=\sqrt{4}\ \sqrt{9}$ 是正确的。事实上，印度人认为根式可以同整数一样处理。

印度人远比希腊人幼稚，因为他们看不出无理数概念所涉及的逻辑难点。他们对计算的兴趣使他们忽视了那些在希腊思想中被认为是最基本的区别。但是在他们随意地把那些适用于有理数的步骤运用到无理数的过程中，数学却取得了进展。此外，他们所有的算术都是完全独立于几何的。

印度人引入了负数来表示负债，这一举动加重了数学家们逻辑上的苦恼。在这种情形下，正数就表示资产。据悉最早使用负数的是公元 628 年左右的婆罗摩笈多（Brahmagupta），他只提出负数的四则运算法则，而没有提出任何定义，公理或定理。12 世纪印度数学家的领袖人物婆什迦罗(Bhaskara)指出正数的平方根有两个，一正一负。他提出了负数的平方根问题，但是却说负数无平方根因为其平方为一负数，而负数不可能是一平方数。

负数并没有完全地为所有的印度人所接受。婆什迦罗也说，当把 50 和 —5 做为一个问题的两个解时，“这种情况下第二个值应舍去，因为它不合适；人们不赞成负数解。”然而，自负数被引入后，逐渐地为人们所应用。

印度人在代数上也取得了一些进步，他们用词的缩写和几个记号来表示运算和未知数，这些记号虽然没有广泛使用，但足以使我们认为印度人的代数在这方面要比丢番图的高明些。他们在解题中仅给出了步骤，而没有任何推理或证明。一般说来，人们已承认了二次方程的负根和无理根。

印度人运用代数的自由程度远甚于我们刚才所指出的事实。举个例子来说，我们从三角学中获知，当 A 为一角时 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$。三角学的创立人和系统阐述者之一托勒密认为，这个等式是一个涉及圆上各弦之间关系的几何表达式。尽管像我们注意到的那样，托勒密自由地运用算术来计算与已知量有关的未知长

度，但他的基本数学和论证却是几何的。而印度人表示三角关系则多是用了像上面所例举的表达式。此外，当他们要从 $\sin A$ 计算得到 $\cos A$ 时，他们就直接采用上面的这个等式和纯代数运算。也就是说，在表达和获得角的正弦和余弦关系时，印度人的三角学依靠代数，远甚于依靠几何。概而观之，印度人注重的是算术和计算方面，而不是演绎结构。他们将数学称为 ganita，意思是计算的科学。虽然过程完美，技巧纯熟，但却没有任何迹象表明他们曾考虑过证明。他们有法则但显然没有进行过逻辑考虑。此外，在数学所有领域中，印度人都没有得到一般性的方法或新的观点。

可以毫不怀疑地说，印度人并不了解他们对数学的贡献有多么重要，他们有为数不多的一些不错的思想，例如，数字 1 到 9 用独立的记号表示，将六十进制转化为十进制，负数，以及把 0 当作一个数来对待。这些思想都是漫不经心的。他们并没有明显地意识到它们是极有价值的创举。他们对数学价值并不敏感，他们把他们自己提出的完善的思想和埃及人及巴比伦人最粗糙、原始的思想混合在一起。阿拉伯历史学家阿尔比鲁尼（al-Bīrūnī）这样评价印度人，“我只能把他们数学和天文学上的著作……比作宝贝和烂枣，或珍珠和粪土，或宝石和卵石的混合物。这些东西在他们眼里没有什么区别，因为他们不能将其自身上升到一个严格的，科学演绎法的高度”。因为他们具有算术上的特殊天赋并把它应用到算术和代数上，所以印度人的工作扩充了建立在经验和直觉基础上的那部分数学。

一方面印度人在实用中忽视了演绎几何，另一方面阿拉伯人对希腊的几何著作做了批判性研究并全力推崇在建立数学的这一分支中演绎证明所起的作用。然而，在阿拉伯数学中占重要地位的算术和代数领域内，阿拉伯人和印度人的发展极为相似。他们和印度人一样满足于在同样经验的、具体的和直观的基础上处理这两门科学。一些阿拉伯人也确实给出了几何论据来证明他们对二次方程求解的正确性，但其主要的解题方法和途径是代数上的，这一点和古希腊人有所不同。在解三次方程时，例如对 x^3+3x^2+

$7x+5=0$，他们仅给出几何图形，因为代数方法还有待于发现。而这些图形，却不能通过直尺和圆规来完成，而且理由也无严格的阐述。在他们活跃在数学舞台上的几个世纪中，阿拉伯人在他们做出的贡献中，勇敢地抵制了严谨推理的诱惑。

印度人和阿拉伯人的数学最有意思的特点是他们这门学科中自相矛盾的概念。埃及人和巴比伦人满足于接受依据经验得来的一点点算术和几何法则，这不足为奇，因为人类几乎所有的知识都有这样一个自然基础。印度人和阿拉伯人对希腊人传播的数学证明的新概念是很清楚的，但在算术和代数中他们却不关心演绎证明。对印度人，也许情有可原。尽管他们也有一些希腊人著作的知识，但却对此并不看重，他们主要是沿袭了亚历山大里亚希腊人处理算术和代数的方法。但是阿拉伯人却通晓希腊几何，并且正如我们所看到的，他们甚至对其做了批判性研究，此外，在两种文明中，有好几个世纪曾存在着有利于纯科学追求的条件。因此，要求产生有实际用途的结论的压力，不大可能会使数学家们牺牲证明，而去追求眼前的应用。那么，这两个民族在对待算术和代数时，为什么和古希腊人以及许多亚历山大里亚希腊人，如此大相径庭呢？

对此，有许多可能的答案，尽管阿拉伯人对演绎几何有所批评，但从整体上看，两种文明均缺乏批判力。因此，对于数学，他们可能是满足于现买现卖，即几何讲究演绎，但算术和代数则可以依据经验或直观启发。第二种可能是两个民族，尤其是阿拉伯人，认识到几何相对于算术和代数而言，具有截然不同的标准，但不知道该如何给算术提供逻辑基础，阿拉伯人在他们解二次和三次方程时，至少曾试图给出几何根据。这一事实似乎可以说明这种解释的合理。

还有其他可能的解释，即印度人和阿拉伯人都对算术、代数和三角关系的代数公式感兴趣。这种偏爱也许正表明了不同的心态或者可能反映了不同文明的不同需求。这两种文明都偏重实际，正如我们在谈到亚历山大里亚希腊文明时指出的那样，实际需要确

实要求提供定量的结果，而这就是借助于算术和代数。有这样一个证据有利于说明心态特征有所不同的论断：欧洲人也从印度人和阿拉伯人那里继承了数学遗产，但他们的反应却大不相同。我们以后将看到欧洲人对算术和几何所处的分离地位是大伤脑筋的，不管怎么说，印度人和阿拉伯人从实用出发，大胆地将算术和代数再一次推到前台，并且把它摆在几乎和几何同等的地位上了。

中世纪晚期和文艺复兴时期，当欧洲人通过阿拉伯人和直接由希腊原稿获得已存在的数学知识时，他们努力想正视这两种数学所面临的进退维谷的困境。真正的数学看上去似乎必定是希腊人的演绎几何，而在另一方面，欧洲人也不能否认从古代便开始发展却没有逻辑基础的算术和代数是有效并且实用的。

他们遇到的第一个问题，就是如何处理无理数。意大利数学家帕哥欧里（Luca Pacioli），在耶拿（Jena，德国一城市）的著名德国僧侣、数学教授施蒂费尔（Michael Stifel），医生、学者兼无赖卡丹（Jerome Cardan）以及军事工程师斯蒂芬（Simon Stevin），这些人沿袭印度人和阿拉伯人的传统，使用无理数并引入了越来越多的种类。斯蒂费尔研究了形如$\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}}$的无理数，卡丹研究了涉及立方根的无理数。韦达（Francois Vieta）的表示π的式子是无理数使用广泛的范例。通过考察单位圆的内接正4，8，16，……边形，韦达发现

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

无理数被自由地运用于文艺复兴时期的一个新发明——对数之中。正数的对数是耐普尔（John Napier）于16世纪晚期创造的，其目的是加快算术处理过程的速度。自它发明以后，对数也确是用于这一目的。尽管许多正数的对数是无理数——耐普尔在计算对数的方法中随意地使用了无理数——但所有的数学家都很欢迎这种减轻他们劳动量的工具。

人们随意地使用无理数进行运算，而无理数究竟是不是真正

的数也困扰着这些使用者。因此，斯蒂费尔在他的主要著作，主要论述算术和代数的《整数算术》(1544年)一书中，赞成欧几里得关于量（欧多克斯的几何理论）* 不同于数的观点，但随着新的发展，他又考虑用十进制小数来表示无理数。使他大伤脑筋的是，如果用十进制小数表示无理数，那将需要无数个数字。一方面他说：

> 由于在证明几何图形的问题中，当有理数行不通时，无理数取而代之，并且完全证明了有理数所不能证明的结果，……因此我们感到不得不承认它们的确是数，也就是由于使用它们而得到的结果迫使我们必须承认，这些结果在我们看来是真实、可靠和恒定的。另一方面，别的一些考虑又迫使我们全然否定无理数是数。也就是说，当我们想把它们数出来（用十进制小数的形式）时，……却发现它们无止境地往远跑，使我们没有办法准确地捕捉住任何一个无理数本身。……而本身缺乏准确性的特点，使之不能被称作真正的数。……因此，正如无穷大不是数一样，无理数也不是真正的数，而是隐藏在一种迷雾后面的东西。

接着，斯蒂费尔指出实数不外乎整数和分数，显然，无理数既非整数又非分数，因此也不是实数。一个世纪以后，帕斯卡和巴罗指出无理数仅仅是记号，它们脱离连续的几何量后便不复存在，无理数的运算逻辑必须以欧几里得关于量的理论为依据，但是，欲达到这样的目的，这些理论不免有些力不从心。

在另一方面，也有些肯定的论断认为无理数是合理的，斯蒂芬承认无理数是数，并且可用有理数来不断逼近，瓦里斯（John Wallis）在他的《代数》(1685年)一书中，将无理数看作是地地

---

* 欧多克斯认为量是表示线段、角、面积、体积、时间这些连续变动的东西，而数是从一个跳到另一个，例如从4跳到5。 ——译注

道道的数。但是，斯蒂芬和瓦里斯都没有对此提供任何逻辑基础。

此外，当笛卡尔在其《几何》(1637 年) 一书和费马在他 1629 年的手稿中发明解析几何时，他们对无理数也没有清晰的概念。然而，他们都推测在所有的正实数和一条直线上的点之间存在着一一对应关系，也就是说直线上任何一点到某一确定起始点的距离都可以用一个数表示。由于许多数都是无理数，所以尽管并未找到逻辑依据，两个人还是默认了无理数的存在。

欧洲人还面临着负数的问题。在欧洲，人们是通过阿拉伯人的著作知道这种数的，但在 16、17 世纪大多数数学家都不承认它们是数，即使承认了，也并不认为它们是方程的根，15 世纪的丘凯 (Nicolas Chuquet) 和 16 世纪的斯蒂费尔都把负数说成是荒谬的数。卡丹给出了方程的负数根，但认为是不可能的解，而仅仅是一些记号。他把负数根称为虚构的，正根称为真实的。韦达则全然摒弃负数，笛卡尔也只部分地接受了它们。他把方程的负根称为假根，因为他们代表比没有还要少的数，但是，他又指出给定一个方程，可以得到另外一个方程，使它的根比原方程的根大任何一个数量。于是一个有负根的方程就可以化成一个有正根的方程了。因而他指出：既然我们可以把假根转化为真根，那么负数也是可以勉强接受的，但他始终没有与负数交好。帕斯卡则认为从 0 中减去 4，纯粹是胡说八道。他在《思想录》中说到："我了解那些不能明白为什么从零中取出四后还剩零的人。"

帕斯卡的密友，神学家兼数学家阿尔诺(Antoine Arnauld)提出一种很有趣的论据来驳斥负数。阿尔诺对 $-1:1=1:-1$ 提出质疑，由于 -1 比 1 要小，那么较小数与较大数的比怎么可能等于较大数与较小数的比呢？莱布尼茨承认这里存在缺陷，但他又申辩说可以用这种比例来进行计算，因为它们的形式是正确的，正如我们可以用虚量来进行计算一样（我们马上就会看到虚量是早已引入的)。但是他又含糊其词地说，所有没有对数的量都是假想的（不存在的)。这样说来，-1 是不存在的，因为大于 1 的数的对数是正的，在 0 和 1 之间的数的对数是负的，所以没有什么数

可以做为负数的对数。实际上，如果 log（-1）存在的话，那么根据对数法则，log $\sqrt{-1}$就应该等于 log（-1）的一半，但$\sqrt{-1}$确实没有对数。

最早把负数单独地写在方程的一边的代数学家之一是哈里奥特（Thomas Harriot），但他并不承认负根，在他的遗著《实用分析术》(1631年）中甚至“证明”了这样的根是不可能的。庞贝利(Raphael Bombelli）给出了负数的明确定义，但是他却不能证明负数的运算法则，因为即使对于正数，人们也没有找到其可用的基础*。斯蒂芬则在方程中用到了正数和负数系数并且承认负根的存在。吉拉德(Albert Girard)在他的《代数中的新发明》(1629年）一书中把负数和正数同等对待，并在二次方程的两个根均为负数的情况下也给出两根。吉拉德和哈里奥特都用减号表示减法运算和负数，但负数是一个独立的概念，而减法则是一种运算，因此，实际上应该用两种分离的记号来表示它们。

总的说来，在16、17世纪，并没有许多数学家心安理得地使用或者承认负数，更谈不上承认它们可以作为方程的真实的根。当时的人对负数还有一些古怪的概念。尽管瓦里斯超过了他那个时代的人，并接受了负数，但他却认为负数大于无穷大同时小于零。在他的《无穷大的算术》(1655年）中，他论证说，当 a 是一个正数时，比值 $a/0$ 是无穷大，那么把分母变成负数，即在 a/b 中，b 为负数时，这个比就应该大于 $a/0$，因为分母比0要小，所以这个比就是大于无穷大的。另外一些更先进的思想家，像庞贝利和斯蒂芬提出的主张，则相当有助于整个实数体系被人们完全接受。庞贝利假定在实数和直线上（给定单位长度）的长度存在着一一对应关系，他还定义了长度的四则基本运算，他认为实数及其运算已通过这些长度及对应的几何运算进行了定义。这样一来，实数体系就在一个几何的基础上合理化了。斯蒂芬也把实数看作是长度，他相信，通过这样的解释，无理数的困难也可以迎刃而解了。

* 奥登诗云：负负得正，不言而喻。 ——原注

当然，这种观点仍然将实数和几何紧紧地联系在一起。

当欧洲人还没有从无理数与负数的困境中摆脱出来时，他们又糊里糊涂地陷入了我们现在称之为复数的泥沼之中。他们在把平方根的算术运算推广到所有已出现的数上时，例如，在求解二次方程的过程中，得到这种新数。像卡丹则在《重要的艺术》(1545年）的第37章中提出并解决了把10分为两部分，使其乘积为40的问题。这一看似荒谬的问题确实有解。因为正如达兰贝尔所说的那样，“代数是慷慨的，它的给予常常超过你的需求。”设x为10的一部分，方程可以写做$x(10-x)=40$，卡丹求得$5+\sqrt{-15}$和$5-\sqrt{-15}$两个根。接着，他指出，有一些“尽管本身具有独创性，但却没有什么用的诡辩的量”。“不管会受到多大的良心责备”，将$5+\sqrt{-15}$和$5-\sqrt{-15}$相乘，得到乘积为$25-(-15)$即40后，他这样说：“算术是如此微妙地发展着，而它的尽头，却正如常言所说，是既精致又无用处的”。

卡丹在求解三次方程的代数方法中进一步地和复数打交道，这种代数方法在他的著作中得以体现，尽管他寻求和最后得到的只是实根，但在有复根存在的情况下，他的公式也会给出复根。特别是当所有的根都为实数时，他的公式也将产生复数，并且实根可以由这些复数得到。这样看来，他应将复数的地位提高些，但是，因为他不知道如何求复数的立方根以获得实根，所以他就把这个难点搁置起来了，他用了另外一种方法来求实根。

庞贝利也考虑了三次方程的复数解，并且采用了实际上和现代形式一样的公式，来表述复数的四则运算，但他仍认为复数是无用和诡辩的。吉拉德则承认复数至少可以作为方程的形式解，在《代数的新发明》中，他说：“有人会说，这些不可能的解（复根）是什么？我的回答是：有三方面的解释，一是一般法则的必然性，二是没有其他的解，三是因为他们有用。”但是卡丹的先进观点并没有产生什么影响。

笛卡尔也摒弃复根，并造出“虚数”这个名称。他在《几何》一书中说：“真根和假根（负根）并不总是实在的，有时它们

是虚的。"他认为负根至少可以在将出现它们的方程转化为有正根的方程后变成"实的"，但对复根却不能这么做，因此，复根不是实的而是虚的；它们并不是数。甚至牛顿也不认为复根是有意义的，极有可能是因为在他那个时代复根缺乏物理意义，实际上，在《普遍的算术》（第二版 1728 年）中他说："正是那些方程的根应该经常出现不可能的情况（复根），才不会使那些本应不可能的问题看起来是可能的。"也就是说，在物理和几何上没有解的问题应该具有复根。

常被人引述的莱布尼茨的一段话反映了对复数缺乏清晰认识的情况："在那个分析的奇观中，上帝的精神找到了一个超凡的渲泄口，这个奇观是理想世界的怪物，是介于存在和不存在之间的两栖物，这就是我们称之为 $\sqrt{-1}$ 的虚根的东西。"尽管莱布尼茨已在形式上运用了复数，他还是不理解复数本质。为了证实他和约翰·贝努利在计算中对复数的应用，莱布尼茨指出这样做并无损害。

尽管 16、17 世纪人们对复数缺乏任何清晰的认识，但实数和复数的运算步骤却得到改进和推广。在《代数》一书中，瓦里斯说明了如何在几何上表示实系数二次方程的复数根。瓦里斯说，实际上，复数并不比负数更荒诞，由于负数可以在一条直线上表示出来，那么复数也就有可能在一个平面上表示，他确实给出了不很完善的表示法，当方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根或复根时，他还给出了其根的几何作图。尽管瓦里斯的工作是正确的，但却被人们所忽视了，因为数学家们不肯接受复数。

在 17 世纪，还出现了其他一些数学逻辑的问题，在下一章我们将讨论它们。这里我们将着重讨论 18 世纪的数学家们在致力于理解和证实他们有关无理数、负数、复数以及代数的工作中遇到的困难。比如（正）无理数，尽管并未对其下定义，也没有确定其性质，但它们在直观上很容易被接受，因为其性质和整数、分数的一模一样，因此，数学家们自由地使用它们并且没有对其含义和性质提出任何新的疑问。包括欧拉在内的一些人，认为其逻辑基础就在欧多克斯的量的理论中，唾手可得。这一理论在欧几

里得的《原本》第五篇中有详细说明。欧多克斯给出的量的比例的理论与几何紧密相连，但它决非无理数的理论。18世纪的人们虽然在感觉上对无理数十分明了，对其逻辑却知之甚少。负数对数学家的困扰，远甚于无理数，大概是因为负数没有现成的几何意义，并且它的运算规则也非常奇怪。尽管从1650年以后，负数的运用十分自由，但却因为它的概念和逻辑基础不清楚，数学家们还是继续粗制滥造一些证明，或者是反对其应用。在著名的《百科全书》的"负数"这一词条中，理性时代的伟大学者之一达兰贝尔说："导致负数解的问题意味着假设的某些部分原本是错误的，但都被假定为正确的。"在他关于负量的论文中，他又说："得到一个负数解意味着该数的反面（相应的正数）是所需的解。"

欧拉，这位18世纪最伟大的数学家，写下了人类历史中最杰出的代数课本之一。在他的《对代数的完整介绍》（1770年）一书中，他证明了减$-b$的运算等于加b运算，因为"免除负债即意味着奉送礼物"。他还证明了$(-1)\times(-1)=+1$，因为其积必为$+1$或-1，而他已经指明$1\times(-1)=-1$，那么$(-1)\times(-1)$必为$+1$。但即便是在18世纪最好的课本中，表示减法的减号和像在-2中用来表示负数的负号，仍然常常被弄混。

18世纪时期仍有许多人反对负数，英国数学家马塞雷（Baron Francis Maseres）是剑桥大学克莱尔学院的研究员和皇家学会会员，他曾写过一些令人钦慕的数学论文，并发表了一篇关于人寿保险理论方面的重要文章。1759年，他发表了《论代数中负号的运用》一文，他指出如何通过仔细将二次方程分类来避免负数（除了用来表示而不是实际运算，从较小量中减去较大量以外），特别是负根。那些具有负根的方程都被个别地考虑，并且理所当然地把负根剔除掉。对三次方程他也采取同样的方法。关于负根，他说：

> ……就我们所能判定的而言，它们只会给整个方程理论添乱，并且使那些本来是非常平常简单的事物变得晦涩难懂，玄妙莫测……。因此，我们确

实希望负数从未进入代数，或者是重新把它剔除出去。如果能做到这点的话，我们有理由想见，对于那些含糊和被莫名其妙的概念所困扰的代数计算，许多博学睿智之士现在所提出的异议，也将因此而消除；也将可以肯定地说，代数，即普遍算术，就其本身性质而言，是一门同几何一样简单、明晰和易于证明的科学。

关于复数的意义和用途的争论也越来越尖锐。一些数学家引入了负数的对数（以及复数的对数）作为复数，这一举措，使复数处境更为尴尬。

从 1712 年开始，莱布尼茨、欧拉和约翰·贝努利通过信件与论文在复数的意义，特别是负数和复数的对数问题上争论不休。莱布尼茨与贝努利用笛卡尔的“虚的”一词来描述复数，“虚的”就是说这种数（以及负数）是不存在的，尽管他们两个人都在计算中不可思议地成功运用了这种不存在的数。

莱布尼茨，正如我们所提到的那样，给出了各种证明来说明负数的对数是不存在的。约翰·贝努利认为 $\log a=\log(-a)$，他还用好几个证明做为其依据，其中一个用了正数的对数定理：$\log(-a)=\frac{1}{2}\log(-a)^2=\frac{1}{2}\log a^2=\log a$。另外一个证明采用了微积分，也得到同样的结论。莱布尼茨和约翰·贝努利在这几年中有许多通信往来，但其中大多数都是些废话。

欧拉找到了真正的答案，其结论在 1751 年的一篇论文《方程中虚根的研究》中发表，虽然他的最终结论是正确的，但其证明却是错误的。这一结论适用于所有的复数，也包括实数（因为 $x+iy$ 中，y 等于 0 的话，该数就变成了实数）。这一结论是

$$\log(x+iy)=\log(\rho e^{i\varphi})=\log\rho+i(\varphi\pm2n\pi)^{*}$$

---

* 欧拉在这里采用了被称为复数的极坐标表示的形式。$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，φ 是原点到 $x+iy$ 的线段与 x 轴之间的夹角，若 $y=0$，则 $\varphi=0$。 ——原注

然而，欧拉的这一论文却不为他的同时代的人所理解。

欧拉在 1747 年 4 月 15 日给达兰贝尔的一封信中阐述了其结论，他甚至指出一个正实数有无穷多个对数值，但只有一个实数；这个实对数值就是我们在计算实数的对数时常用的那一个。欧拉的信和论文并没有说服达兰贝尔。在《负数的对数》一文中，达兰贝尔举出各种玄奥莫测的分析学的和几何学的论据来否定这种对数的存在，他使这一问题变得更加神秘。他还说这仅仅是一个措辞的问题，并以此掩盖他与大师欧拉之间的分歧。

所有卷入这一论战的人都坚持认为自己的想法是正确的。在 18 世纪前半叶，人们还认为一些复数的运算，如复数的复数幂，将会产生一种全新的数。但正是达兰贝尔本人，在《关于风的一般成因的考虑》一文中，证明了复数的所有运算的结果只能是复数。尽管在这一问题上，达兰贝尔迈出了举足轻重的一步，但他的证明确实是由欧拉和拉格朗日所完善的。也许达兰贝尔已意识到了他的关于复数的思想处于一种很混乱的状态，因为在他为《百科全书》写数学条目时，并没有提及复数。

显然，欧拉也仍然没能弄明白复数，在 18 世纪最优秀的代数课本，他的《代数》（1770 年）一书中，他说：

> 负数的平方根既不是零，也不是比零小或比零大的数。显然负数的平方根不能被划归为任何可能的数（实数），因此我们必须说它们是不可能的数。而由这种情况，我们将导出这样一种数的概念，它们在本质上是不可能的，并且通常被称为虚数或幻想中的数，因为它们仅存在于想象之中。

对于复数他还犯了一些错误，在他的《代数》中他认为 $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}=\sqrt{4}=2$，因为 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$。

尽管欧拉将复数称为不可能的数，但他又说复数是有用的。他认为复数的作用在于能够告诉我们哪个问题是有解的，哪个问题是没有解的。这样，当我们要求把 12 分为两部分，并使两部分乘积为 40（卡丹的幽灵）时，我们得到两部分为 $6+\sqrt{-4}$ 和 $6-$

$\sqrt{-4}$，因此，欧拉指出，我们可以得知这个问题是没有解的。

尽管对于复数有如此众多的反对意见，在18世纪，人们还是像使用实数一样有效地使用复数，数学家们也因此对它产生了一些信心。在数学证明时，运用复数，最后的结果总是正确的，并且复数在其中发挥着显著作用。关于这些证明的有效性，甚至往往是结果的正确性的疑虑依然困扰着数学家们。

达兰贝尔在《百科全书》一书中关于负数的表述，反映了人们对待接受几种有些麻烦的数的普遍态度，这些数包括无理数、负数和复数。达兰贝尔的这一条目，写得一点也不清晰，他得到这样一个结论："不管我们如何看待这些量，负数的代数运算法则已普遍地为人们所接受并被认为是正确的"。

在欧洲人试图去理解各种类型的数的几个世纪中，另外一个重要的逻辑问题变得突出起来。即运用代数的逻辑，第一本汇集了重要的新成果的著作是卡丹的《重要的艺术》。书中给出了如何求解三次方程，如 $x^3+3x^2-6x=10$ 和四次方程，如 $x^4+3x^3+6x^2+7x+5=0$。在约一百年中，代数体系中还增添了大量的其他成果，像数学归纳法，二项式定理，求高次或低次方程的根的近似法等，而主要的贡献者，则是韦达、哈里奥特、吉拉德、费马、笛卡尔和牛顿。但这些成果却未得到证明，尽管卡丹和其后的代数学家庞贝利、韦达确实给出过几何证明以证实他们解三次方程和四次方程的方法，但是，由于他们没有考虑负根和复数，因而其证明实际上并不能称之为证明。此外，引入像四次幂和五次幂这样的更高次方程，即意味着仅限于三维的几何不能作为证明的依据，其他著者的成果，也常常只是一些从具体的例子中提出的结论。

韦达向正确的方向迈进了一步，从埃及人和巴比伦人的时代起，一直到韦达做了这方面的工作为止，数学家们仅解决带有数字系数的线性、二次、三次和四次方程。因而，像 $3x^2+5x+6=0$ 和 $4x^2+7x+8=0$ 这两个方程被认为是不一样的，尽管很明显地存在着一种同样的方法来解决这两个方程。此外，为了避免负

数，在很长的一段时期中，人们将诸如 $x^2-7x+8=0$ 这样的方程用 $x^2+8=7x$ 的形式来处理，这样，同次方程中就有许多种类并且每一种都是分别求解的。韦达的一个主要贡献就是引入了字母系数。

韦达所受的专业训练是律师，总的说来，他将数学作为一种业余爱好，并自己出资出版发行其著作。尽管以往曾有人零星和偶然地用到了字母，但韦达是第一个有意识地系统地使用字母的人，字母的主要的新用途不仅是用于表示未知量或未知量的幂，而且用以表示一般的系数。这样，所有的二次方程可以一下子写成 $ax^2+bx+c=0$（我们现在的记法）来处理。在这里，a、b、c 这些字母系数可以表示任何数，x 则代表未知量或要解的未知量。

韦达将其新型的代数叫做类型计算，以区别于数字计算，他完全清楚当他研究一般二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 时，他所处理的是整个一类的表达式。在他的《分析艺术引论》(1591 年）中区分类型计算和数字计算时，韦达划分了算术与代数的界限。他说，代数是作用于事物的类别或形式上的方法，是类型计算。算术和数字系数的方程则是与数打交道，是数字计算。这样一来，通过韦达所走出的这一步，代数成了研究形式的一般类型和方程的学问，因为对一般情况的研究包含了无穷多个特殊情况。

韦达用字母表示一类数的优点在于：如果证明了某种求解 $ax^2+bx+c=0$ 的方法是正确的，那么，这种方法就可以确保求解无穷多个具体方程，如 $3x^2+7x+5=0$ 的正确性。韦达的贡献在于使代数证明的普遍性成为可能，但是如果想对 a、b、c（在这里代表任意的实数或复数）进行运算时，就必须知道这一运算对所有的实数和复数都适用。但因为这些运算都未得到逻辑上的证明，甚至数的类型的确切定义也未曾有明确的表述，所以对普遍的 a、b、c 运算的证明也自然不能实现，韦达自己也是摒弃负数和复数的。因此，在他的类型运算中所预见的普遍性也仅能限于某一范围内使用。

韦达的思想就算是合理的，也无法解释。一方面，他在运用

字母系数上做出了极为重要的贡献，而且，韦达充分认识到这一举措使普遍的证明成为可能，但就其拒绝承认负数和用字母系数表示负数上看，却同样揭示了即使是人类最优秀的头脑，也存在着严重的局限性。负数的运算法则已存在了约八百年，并且以此法则能够得到正确的结果。韦达本不应反对这些法则，因为这些法则差不多就是韦达所处时代的代数所能提供的全部，只是负数缺乏正数所具有的直观性和物理意义。显然，左右数学家们接受什么的并不是逻辑而是直觉，直到 1657 年，赫德（John Hudde）才允许了字母系数既可以代表负数，又可以代表正数，从此以后，数学家们才开始自由地使用它。

在韦达时代，即 16 世纪末，代数只是几何的一个附庸。从解决几何和商业中的简单实际问题的目的出发，产生了涉及一个未知数的一元方程和涉及两个未知数的二元方程的解法，直到 17 世纪代数的威力才被逐渐认识到。笛卡尔和费马迈出了举足轻重的一步，这就是坐标几何（应该称之为代数几何）的产生。其基本思想是，曲线显然可以用方程来表示。例如，$x^2+y^2=25$ 代表半径为 5 的圆，在证明曲线任意多个性质方面，代数表示法要比古希腊人纯粹的几何法或综合法容易得多。

然而，当笛卡尔于 1637 年出版其《几何》时，与费马 1629 年的著作（费马去世后出版）一样，却不打算接受负数。因此，代数方法的思想进入了几何，却未充分发挥其作用，这一点是很明显的。但笛卡尔和费马的继承者们却将负数引入了坐标几何，使其成为分析和几何学重要发展的基础。

第二个将代数推向前台的创举是运用代数公式表示函数，正如我们所知的那样（第二章），伽利略引入了用公式描述物体运动的思想。这样，以每秒 100 英尺的速度向上抛的物体距地面的高度可用公式 $h=100t-16t^2$ 来表示，关于运动的各种情况都可通过代数方法从这个公式中推导。例如，物体所能达到的最高高度，达到最高高度所需的时间以及物体返回地面所需的时间。实际上，代数的巨大作用很快就被认识到，数学家们开始广泛地运用代数，使

其迅速发展成为占主导地位的科学并超过了几何。

代数的自由使用激起众怒，哲学家霍布斯尽管在数学上是个小人物，但在反对"那群把代数用到几何上去的家伙"时代表了许多数学家的意见。霍布斯说这些代数学家把记号错认为几何，他还称瓦里斯关于圆锥曲线代数处理的著作，是一本无耻的书和"记号之痂"。许多数学家，包括帕斯卡和巴罗都反对代数的运用，因为它没有逻辑基础，他们坚持用几何方法和证明。一些人则相信可以退回到在几何基础上建立代数学的基础，并以此自慰。但我们已说过，这只是一个幻想而已。

虽然如此，出于一种实用的目的，大多数数学家还是自由地使用着代数。代数本身在解决各种实际问题时的价值以及甚至是在处理几何问题时的优越性是如此显著，以致使数学家愈发深入到这一领域中。

笛卡尔始终将代数看作是为几何服务的，而瓦里斯和牛顿的观点却与之不同，他们承认代数的全部功用。虽然如此，数学家们对放弃几何方法还是极不情愿。据编注了牛顿《原理》第三版的潘伯通（Henry Pemberton）说，牛顿不但经常对希腊几何学家表示钦佩，而且还为自己没有比过去那样更紧密地追随他们而自责。在他给J. 格雷戈理的侄子D. 格雷戈里（David Gregory）的一封信中，牛顿认为代数学是数学中笨拙者的分析。但在他自己的《普遍的算术》（1707年）中，却同任何一本著作一样，欲建立代数的权威性。在这本书中，他将算术和代数作为基础的数学科学，并仅在几何能提供证明的地方才允许其存在。但是从整体上看，这本书只是法则的堆砌，很少有证明甚至是直观证据来说明数和代数过程。牛顿的观点是在代数表达式中用字母代表数字，而算术的确定性是没有什么可怀疑的。

同样的，莱布尼茨也注意到了代数增长着的优势并充分肯定了它的有效性，但考虑到缺乏证明，莱布尼茨不得不这么说："几何学家几句话就能证明的东西，在微积分中却往往是十分冗长的……代数的运用是有保证的，但它并不更好一些。"他把当时的代

数研究工作称为“好运气和机遇的混合物”。但欧拉却在《无穷小分析引论》(1748 年)中公开并毫不保留地称誉代数远比希腊人的几何方法优越。直到 1750 年，人们才得以放心大胆地运用代数。此时，代数已是一棵枝繁叶茂的大树，但它却没有根。数系和代数学的发展形成了鲜明的对比，几何学是公元前 300 年前用演绎的方法建立起来的，后面我们将看到几何中的几个瑕疵也易于纠正。但算术与代数学却怎么也找不到逻辑基础，这样看来，缺少逻辑基础，势必会困扰所有的数学家。但是，精通希腊演绎几何的欧洲人为什么会接受并运用没有依逻辑而建立起来的各种类型的数和代数学呢?

这里有几个原因。人们接受整数和小数的性质时，其基础自然是经验。当在数字中增添新型的数时，建立在经验基础上并已为人们接受的正整数和小数的运算法则就被用于这些新数上，并以几何思想作为得心应手的指导。字母在引入时，仅代表数并如同数一样处理，复杂些的代数技巧，则似乎可以由像卡丹所用的几何证明或由纯粹的特例的归纳推理得以证实。当然，这些程序在逻辑上都是不能令人满意的，即使是在用到几何的地方也没有为负数、无理数和复数提供逻辑。当然，四次方程的解是不可能由几何证明的。

其次，一开始，特别是 16 世纪和 17 世纪，人们并不把代数看作是一门需要有自身逻辑基础的数学的独立分支，而认为是分析几何问题的一种方法。许多从事代数研究的人，著名的有笛卡尔，都认为代数是一种分析方法。从卡丹的《重要的艺术》和韦达的《分析艺术引论》这两个题目可以看出，他们用艺术这个词，其含义就是今天我们常用于与科学相对的意义。而现在通称为解析几何学的笛卡尔的代数几何学，正反映了人们对待代数的这种态度。直到 1704 年，哈雷在英国皇家学会的《哲学学报》上还发表了一篇文章，说代数是一种分析艺术，但笛卡尔的解析几何在使数学家们深感代数的力量这一点上起了至关重要的作用。

终于，使用负数和无理数和在科学研究中运用代数产生的结

果与观察和实验的结果吻合得非常好。比如说，在某些科学研究中使用负数时，不管数学家们存在着什么样的疑虑，都将会因为最终数学结果具有物理上的合理性，而得以消除。人们主要关心的是科学运用，因此，任何在工作中能起作用的手段和方法，几乎都被毫不犹豫地接受。科学的需要战胜了逻辑上的顾忌。数学家们把对代数合理性的怀疑抛到了一边，就好像贪婪的实业家把道德准则抛到了一边。他们冒失却又自信地运用新代数，这样一来，代数学就逐渐被他们改造成一门独立的科学，包含并"建立"了数与几何的结论。实际上，瓦里斯也曾断言说，代数的过程和几何过程是一样合理的。

到 17 世纪末，数和代数学已被认为是独立于几何而存在的。数学家们为什么没有致力于逻辑上的发展呢？既然有像欧几里得《原本》中所包含的几何的演绎推导结构这样的样本，那么，数学家们又为什么没有发展一个数和代数的演绎推导结构呢？这是因为几何的概念、公理和原理从直观上看，远比算术和代数的易于接受，画图（在几何中称为作图）可辅助解释结构。但无理数、负数和复数的概念却微妙得多，即使可以得到图形，也无法解释数字作为数和建立于数系基础上的字母表示法的逻辑结构。为数系和代数建立逻辑基础是一个非常困难的问题，远比 17 世纪的数学家能体会到的要难，后面我们将有机会探讨它（见第八章）。幸运的是，那时的数学家容易轻信别人，甚至可以说，是很天真的，而并没有在逻辑问题上小心翼翼，因为自由创造须领先于形式化和逻辑基础，数学创造中最伟大的时期已经到来。

第六章 不合逻辑的发展：分析的困境

> 任何研究工作的开端，几乎都是极不完美的尝试，且通常并不成功。每一条通向某个目的地的路都有许多未知的真理，唯有一一尝试，方能觅得捷径。也只有甘愿冒险，才能将正确的途径示以他人。……可以这样说，为了寻求真理，我们是注定要经历挫折和失败的。
>
> ——狄德罗

数学家们以微积分为核心的分析是建立在算术与代数虚构的逻辑基础及欧几里得几何有争议的基础之上的。微积分是全部数学中最微妙的一个学科，一想到我们在较为简单的领域中所发现的那些缺陷，不难想象，微积分中的一系列概念和逻辑结构肯定令数学家们智穷力竭了。事实确实如此。

微积分使用了函数的概念。简单地说，函数是变量之间的一种关系。例如，当一个球从房顶落下时，下落距离和下落时间同时增加。如果我们忽略空气阻力，那么距离和时间这两个变量之间的函数关系可以用关系式 $d=16t^2$ 来表示，在这里，t 指下落时

间，单位是秒；d 指时间 t 内下落的距离，单位是英尺*。

任何重要思想的起源都可以追溯到几十年或几百年以前，函数的概念也是如此。然而，直到 17 世纪，人们对函数才有了明确的理解。历史的细节并不重要，重要的是这样一个事实：虽然函数的概念易于理解，但即使是最简单的函数也涉及到所有形式的实数。因此，在上面这个例子里，肯定有人会问 $t=\sqrt{2}$ 秒时，d 的值是多少。同样，也会有人问当 $d=50$ 时，t 的值应该是多少。此时 $t=\sqrt{\frac{50}{16}}$，这是一个无理数，而无理数在 17 世纪时并不被人们充分了解。于是，人们在处理数字时就跳过逻辑，对函数也是如此。然而，在 1650 年以前，无理数被人们随心所欲地使用，这种错误也就被掩饰了。

微积分不仅使用了函数概念，还引入了两个全新的且更为复杂的概念：微分和积分。这样，除了用来处理数字所需的基础之外，它们还需要逻辑方面的基础。

17 世纪最伟大的数学家们着手处理这两个概念。这些学者中最著名的有开普勒，笛卡尔，卡瓦列里（Bonaventura Cavalieri）、费马、帕斯卡、詹姆斯·格雷戈里（James Gregory）、罗伯瓦尔（Gilles Persone de Roberval）、惠更斯、巴罗、瓦里斯，当然还有牛顿和莱布尼茨。上述每个人都在定义、计算微分和定积分方面做出了各自的贡献。有些人用的是纯几何推理的方法，有些人用的是纯代数推理的方法，还有些人兼而用之。我们关注的是这些人坚持数学推理这一标准的好坏程度，为了达到这一目的，举几个典型的例子就够了。事实上，这其中许多方法都很类似，不值得在这里多说。

正如牛顿所做的那样，理解导数之本质最好的方法是考虑速度。如果一个物体在 4 秒内运动了 200 英尺，我们可以说平均速度是每秒 50 英尺。如果物体是匀速运动的，平均速度也就是 4 秒

* 1 米＝3.2808 英尺　——译注

内每一时刻的速度。然而，绝大多数运动都不是匀速的，一个落向地面的物体，一颗从枪中射出的子弹和一颗围绕太阳运转的行星都在不停地改变运动速度。很多情况下，我们必须知道某些特定时刻的速度。例如，当子弹射中人的一瞬间的速度是非常重要的，如果这个速度是零，子弹就会落在地上，如果是 1000 英尺/秒，被射中的人就会倒在地上。这里所指的时刻是指长度为零的一段时间。此时，物体移动的距离也为零。因此，如果我们像计算平均速度那样计算瞬时速度，用走过的路程除以时间，结果就是 0/0，这是毫无意义的。

17 世纪的数学家们依稀看到了摆脱这种困境的方法，但是并没有抓住它。这种方法也许可以这样描述：假设一个物体正在向地面落去，我们想知道下落后第四秒时它的速度。现在，如果我们考虑用物体下落中时间间隔来代替时刻，用它在这一段时间间隔内下降的距离除以所用时间，就得到了这一间隔中物体的平均速度。我们可以计算从第四秒起，在 1/2 秒，1/4 秒，1/8 秒…内的平均速度。这个时间间隔越短，计算出来的平均速度肯定越接近第四秒时的速度。若预先假定我们所要做的就是计算不同时间间隔内的平均速度并且研究它们会趋近于哪一个数，这个数就是我们所要求的第四秒时的瞬时速度。这个方案看起来不无道理，但是我们应当看到事实上还有许多内在的困难。但不管怎么说，如果我们能计算出第四秒时的速度，我们就把它称作 $d=16t^2$ 在 $t=4$ 秒时的导数。

如果使用数学符号来表达上面这段话，我们会更清楚地看到困难所在。这些表达式，尤其是最后被大家所接受的那个，应归功于费马。下面我们计算一个下落的小球在第四秒时的速度。这个小球的运动状态可用

$$d=16t^2 \tag{1}$$

描述。当 $t=4$ 时，$d=16\times4^2=256$，设任意一个时间增量是 h，在第（$4+h$）秒时，小球会下降 256 英尺加上距离增量 k，有

$$256+k=16(4+h)^2=16(16+8h+h^2)$$

或

$$256+k=256+128h+16h^2$$

两边都减去 256

得
$$k=128h+16h^2$$

在时间 h 秒内的平均速度为

$$\frac{k}{h}=\frac{128h+16h^2}{h} \tag{2}$$

幸运的是，费马用了这样一个简单的函数而且认为可以在上式右边分子、分母同除以 h，这样就得到了

$$\frac{k}{h}=128+16h \tag{3}$$

然后，他令 $h=0$，得到

$$\dot{d}=128 \tag{4}$$

作为第四秒时的下落速度（符号 $\dot{d}$ 是牛顿发明的）。这里的 $\dot{d}$ 就是函数 $d=16t^2$ 在 $t=4$ 秒时的导数。

推导的问题在于：开始，h 不为零，所以才能进行分子、分母同除以 h 的运算，即（3）式只有在 $h\neq 0$ 时才正确，这样就不能令 $h=0$ 而得出结论。而且，对于 $d=16t^2$ 这样简单的函数，（2）式可以简化为（3），而对于更复杂的函数，我们只能导出类似于（2）式的结果，这样，当 $h=0$ 时，k/h 就是 0/0，这是没有意义的。

费马一直没能证明他所做的这些，事实上，虽然必须承认他是微积分学的创始人之一，但他并没能把这项工作非常深入地进行下去。在他能对正在研究的想法给予充分的证明之前，他总是非常谨慎地不公布任何一般的定理。由于他能给出一个几何的解释，所以他还是满意地得到了正确的推导过程，而且他坚信最终可以得到一个合理的几何证明。

使微积分的创立者们迷惑不解的第二个概念就是定积分。在计算由图形所围的总面积或曲线下的部分面积，由图形表面围住的体积以及各种不同形状物体的重心时，都要用到定积分的概念。

为了弄清楚困难所在，我们来看下面这个问题。即求出一条曲线下的面积。如图（6.1）所示，曲线 GF 的方程为 $y=x^2$，求出由弧 GF，x 轴上线段 DE 和垂直线段 DG、FE 围住的图形 $DEFG$ 的面积。

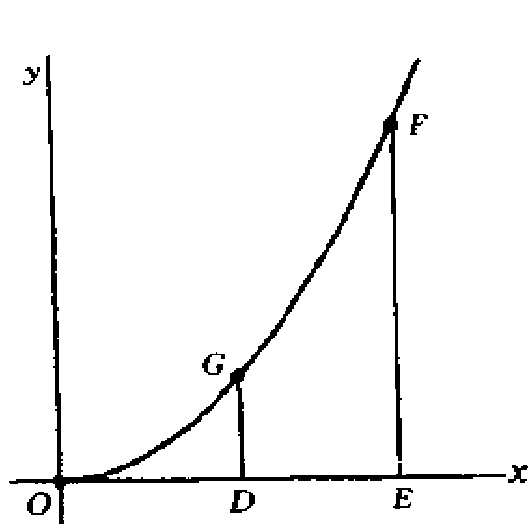


图 6.1

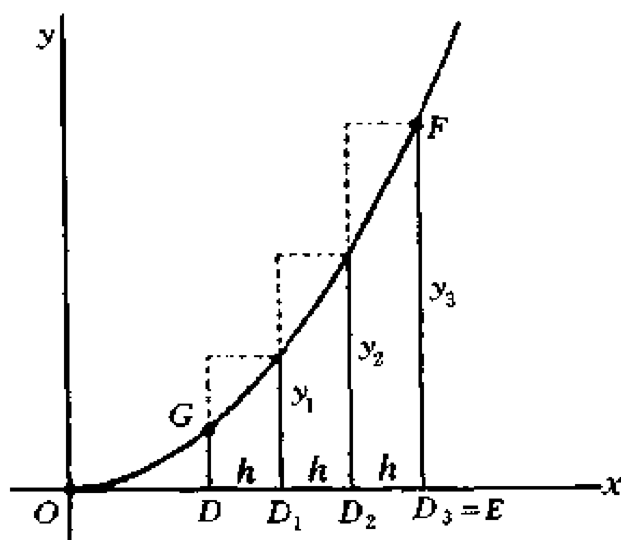


图 6.2

这里，我们得通过逐次逼近来求得整个面积，就像 17 世纪的数学家们所做的那样。我们把间隔 DE 分为等长的三段，每段长 h，把分点记为 D_1、D_2 和 D_3，D_3 也就是 E 点（图 6.2）。把分点处对应的坐标值记为 y_1、y_2 和 y_3，y_1h、y_2h、y_3h 就是图中所示矩形的面积，它们的和

$$y_1h+y_2h+y_3h \tag{5}$$

就是面积 $DEFG$ 的一个近似值。

用更多、更小的矩形，我们就能得到面积 $DEFG$ 更精确的近似值。假设我们把 DE 分成六段。图 6.3 显示出了图 6.2 中的中间那个矩形发生的变化，它被两个小的矩形代替了。由于我们用每个分点处的 y 值做为矩形的高度，图 6.3 中所示的阴影面积就不再是用来表示面积 $DEFG$ 的近似值的六个矩形面积和的一部分了。因此，和式

$$y_1h+y_2h+y_3h+y_4h+y_5h+y_6h \tag{6}$$

就比和式（5）更精确地近似于 $DEFG$ 的面积。

我们可以对上述近似过程做一个一般性的描述，假设把 DE 分为 n 等分，就会有 n 个矩形，每个宽度都是 h，每个分点的 y 值为 y_1，y_2，…，y_n，省略号表示分割的所有中间 y 值。n 个矩形面积的总和就是

$$y_1h+y_2h+\cdots+y_nh. \quad (7)$$

这里省略号表示所有中间的矩形面积。考虑如上所述的把 DE 细分的效果，可知 n 越大，面积和（7）就越近似于所求的 $DEFG$ 的面积。当然，n 越大，h 越小，因为 $h=DE/n$，于是，我们通过这个例子看出用矩形可实现对曲线下面积的逐渐逼近。

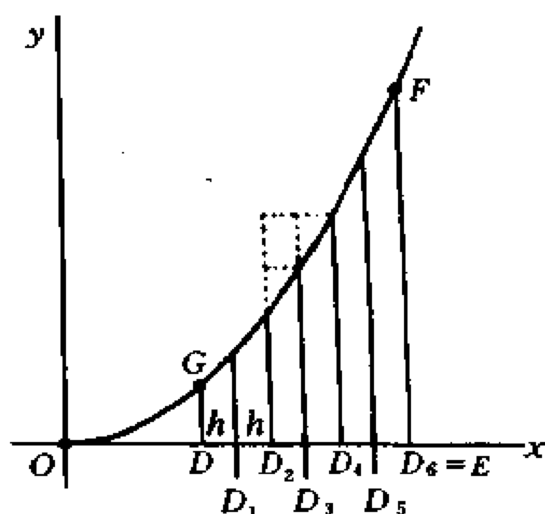


图 6.3

直观地看，矩形越多，其面积和就越接近于所求曲线下的面积。17 世纪的数学家们解决这个问题的办法是让 n 变成无穷大。然而，无穷大的含义本身就不清楚，它是一个数吗？如果是，怎样对它进行计算呢？当费马推导出如同（7）式那样的 n 个矩形的面积和的表达式时，他肯定发现其中包含如 $1/n$ 和 $1/n^2$ 的项。当 n 无穷大时，他认为它们可以忽略不计因而略去了。就像在上述求导数的例子中一样，费马也可以精确地证明，很有可能是用欧多克斯的穷竭法（一种有限而且相当复杂的几何方法，阿基米得用得相当熟练）。

早期用定积分计算面积和体积的工作中，也许卡瓦列里值得一提。因为他是那个时代含糊不清的思考方式的典型，而且影响了许多当时的和后来的人。卡瓦列里把图 6.1 所示的面积看做无限多个他称之为不可分量的总和，这种不可分量被预先假设为直线段。然而，卡瓦列里并不清楚所谓的不可分量究竟是什么，他只不过表明：如果把一块面积分割为越来越小的小矩形，就像图

6.3所示的那样，就可以得到不可分量。在他写的一本名叫《六道几何练习题》(1647年)的书中，他解释说，面积由不可分量组成，就像一根项链由珠子串成，一块布由线织成，一本书由许多页组成。他用这个概念设法比较了两个面积，两个体积，得到了两者之间的正确关系。

卡瓦列里的做法不能令人满意，当时一个叫古尔丁(Paul Guldin)的人指责他不仅没有理解希腊几何，反倒把它搞糊涂了。一位近代的史学家评价卡瓦列里的工作时说，如果有一个专为晦涩难懂而设的奖，那就非他莫属。因为卡瓦列里不能解释无穷个元素，即它的不可分量是怎么组成一个有限物体的，他以拒绝对他的不可分量作任何精确的解释而避不作答。有时他求助于线段的无穷和而不能清楚地解释这种无穷和的本质，有时候，他又说他的方法只是一个避免希腊人复杂的穷竭法的实用方法。更进一步，卡瓦列里争辩说，当代几何学家们对于概念的态度比起他要随便得多，开普勒的《测量酒桶体积的新科学》(1616年)就是一例。他接着说这些几何学家满足于仿效阿基米得求面积的方法，但又没有给出像伟大的希腊人那样完整的证明。相反，他们满足于他们的计算，只要结果有用就行了。卡瓦列里采用同样的观点，他说，他的做法能引向新的创造，而且他的方法一点也没有强迫人们把一个几何结构看成是由无穷多个部分组成的；除了在面积之间和体积之间建立正确的比之外，没有其他目的。但是这些比保持它们的意义和值，而不管人们对于图形的构成有什么见解。做为最后一招，他把这个概念性问题归结于哲学问题，因此就不重要了。"严密性"，他说，"是哲学所关心的事情，而不是几何所关心的"。

帕斯卡支持卡瓦列里，在他的《致外省人书》(1658年)中他宣称不可分量的几何与古典的希腊几何是一致的。"凡是能用不可分量的正确法则证明的东西，也能用古人的方式去严格地证明。"更进一步，他说不可分量的方法必定会受到任何一个自称为几何学者的数学家的承认，它和古代的方法只是语言上的不同。然而，

帕斯卡对于严密性也有矛盾心理，有时他辩护道，为了做正确的工作所必需的东西是专门的“技巧”，而不是几何的逻辑，正如宗教对皈依的领会高于理智一样。在微积分中出现的几何悖论，如同基督教中那里的荒唐事一样。几何中的不可分量与有限量之间的关系同人类的公正与上帝的公正之间的关系是一样的。

还有，观点的正确与否常常是由心智决定的（见第二章）。帕斯卡在他的《思想录》中写道：“我们不仅靠推理，而且也靠心智来认识真理。正是从这后一个来源中我们认识了基本原理，推理在这一点上无法与心智匹敌。……而且正是基于我们心智和直觉知识基础上的推理建立了其全部结论。”当然，帕斯卡并没有使卡瓦列里的方法变得更清楚一点。

对微积分的创建贡献最大的是牛顿和莱布尼茨。牛顿很少涉及积分的概念，但他广泛地使用导数。他求导数的方法基本就是费马的方法，然而，他对这个基本概念的逻辑正确性更清楚一些，他写了三篇微积分方面的论文，而且他的巨著《自然哲学的数学原理》先后出了三版。在他的第一篇论文中（1669 年）他表述了求导数的方法，他评论这种方法是“简短的解释而不是精确的证明。”在这里他用到了 h 和 k 是不可分量这样一个事实。在他的第二篇论文中（1671 年），声明他还做得更好些，因为他改变了对变量的观点，先前他认为变量是离散变化的，h 是终极的不可再分的单元，而现在，他认识到变量是连续变化的，他说他已经把在第一篇论文中所用的那些关于不可分量的定义的苛刻条件去除。然而，他在计算流数（关于导数的术语）时，方法与第一篇实质上是一样，在逻辑上毫无长进。

在牛顿关于微积分的第三篇论文《求曲边形的面积》（1676 年）中，他重申他已经放弃了无穷小量（终极不可分量），接着，他批评了扔掉如前面（3）式中含 h 的项的做法。他说：“在数学中，最微小的误差也不能忽略。”然后，对他的流数的含义又做了一番新的解释，“流数，随我们的意愿，可以任意地接近于在尽可能小的等间隔时段中产生的流量的增量，精确地说，它们是最初

增量的最初的比，……”当然这样含糊不清的措词无济于事。在计算流数的方法这个问题上，牛顿在第三篇论文中的逻辑如同第一篇论文中同样的粗糙，他略去了所有高于 h 的一次幂的那些项，比如说 h^2，这样就得到了导数。

在他的巨著《自然哲学的数学原理》（1687 年，第一版）中，牛顿对流数做了几种陈述，他舍弃了终级不可分量而用了“消失的可分量”，即能够无穷地缩小的量。在《原理》的第一版和第三版中，牛顿说：

> 量在其中消失的终极比，严格说来，不是终极量的比，而且它与无限减少的这些量所趋近的极限之差虽然能比任何给出的差更小，但是在这些量无限缩小以前既不能越过也不能达到这个极限。

虽然这种解释根本说不上明白，但这已是牛顿对他所谓的流数给出的最明白的解释了。在这里，牛顿触及到了关键的词“极限”(Limit)，但他并没有深究这个概念。

毫无疑问，他意识到了他对流数的解释是不能令人满意的，于是，可能在绝望之中，他求助于物理意义。在《原理》中他写道：

> 以下关于没有消失量的终极比的观点值得商榷。因为在量消失以前，比就不是终极的，而若量消失了，也就无所谓比了。同样以下观点也值得商榷，即当运动停止时，也没有一个物体到达某一确定位置的终极速度。因为在物体到达某终极位置之前，速度不可能是终极速度，而若物体到达极限位置，终极速度也就为零了。其实答案很简单。最后速度的意思是：它既不是在物体到达最后位置，运动停止时之前的速度，也不是到达以后的速度，而是正到达那一瞬间的速度。即物体以这样的速度到达它的最后位置并且停止。同样的，就消失量的最后比来记，应理解为不是在量消失以前，也不是在消失以后，而是正当它们消失时的比。

既然他的数学研究结果实际上都是正确的，牛顿就没在微积分的逻辑基础上花过多的时间。在《原理》中，他用的是几何方法并且用几何方式给出关于极限的定理。很久以后，他承认他用了分析的方法来发现《原理》中的定理，但是他还是从几何上来系统地证明，以使他的观点像古人那样可靠。当然，这些几何证明一点也不严格，牛顿对欧氏几何充满信心，但没有真实的证据可以显示它能对微积分有所支持。

莱布尼茨研究微积分的方法有所不同，他认为当 h、k（他写成 dx，dy）减小时，它们成了"逐渐消失的量"或"无穷小量"。此时，h 和 k 不为零，但比任何给定的数都要小，因此，h 的任意次幂，例如 h^2，h^3 肯定可以忽略，而且比值 k/h 就是我们所要求的量，即导数，莱布尼茨用 dy/dx 表示。

莱布尼茨用几何表述 h 和 k 的方法是这样的，当 P、Q 是一条曲线上无限靠近的两点时，dx 是它们的横坐标之差，dy 是它们的纵坐标之差（图 6.4），而且，T 点处的切线就与弧 PQ 重合。因此，dy 除以 dx，就是切线的斜率，三角形 PQR 称做特征三角形，但这并不是莱布尼茨首创的。帕斯卡和巴罗很早就用过。莱布尼

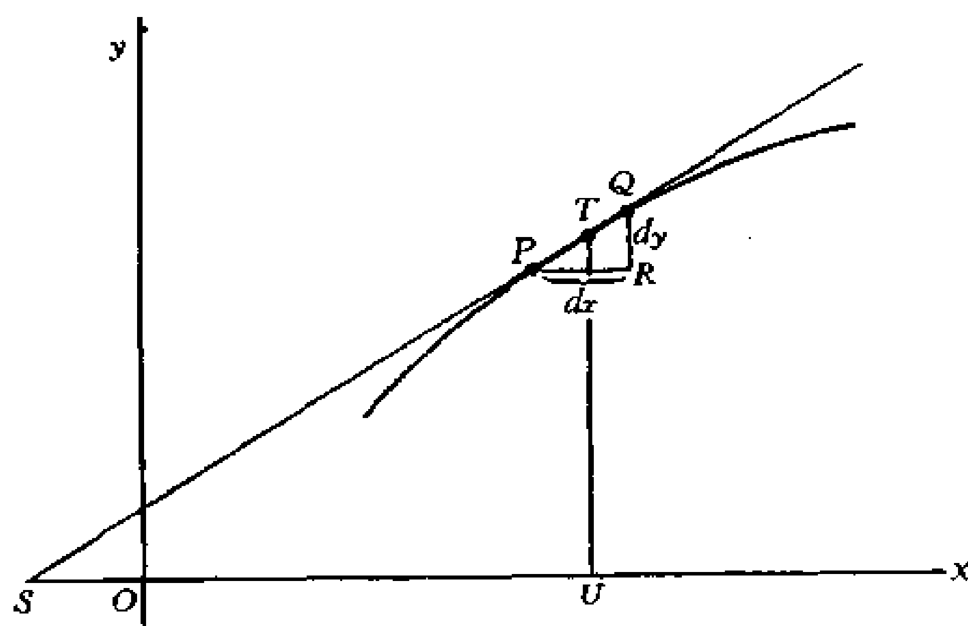


图 6.4

茨研究过他们的著作，莱布尼茨还认为三角形 PQR 与三角形 STU 相似，而且他用这个事实来证明有关 dy/dx 的一些结果。

莱布尼茨对积分的概念也做了广泛的研究。他独立地提出了前述（7）式用矩形求和的思想。然而，从有限多个矩形面积和到无限多个矩形面积和这个过程是含糊不清的，他认为当 h "无限小"时，就得到了无穷和。他把这记作 $\int dx$，并设法算出了类似这样的积分，而且实际上，独自发现了我们现在所说的微积分基本定理。这个定理表明，可以通过求导数的逆过程求得这个积分和（求原函数）。经过了大约十二年的努力，他终于在 1684 年在《教师学报》上发表了他关于微积分的第一篇论文，他的朋友贝努利兄弟对其作了恰如其分的评价，说它"与其说是解释，不如说是谜。"

牛顿和莱布尼茨的思想都不够清晰，而且都受到人们的批评。牛顿对于批评无动于衷，莱布尼茨则不这样，他花了大量篇幅尝试去解释，特别是它关于无穷小量的概念。在 1689 年刊于《教师学报》的一篇文章里，他说无穷小量不是真实的数，而是假想的数，但是，他宣称这些假想的或理想的数服从于通常的规律。

在这篇文章中他还分别用几何方法来证明一个高阶无穷小量，比如说 $(dx)^2$，相对于低阶无穷小量，如 dx，就像一个点对于一条线，而 dx 对 x 就像一个点对于地球或地球的半径相对于宇宙的半径。他认为两个无穷小量的比就是一个不确定量的商，但这个比值是可以用有限数表示的，例如，在几何中 dy 与 dx 之比就是纵坐标与次切线之比（如图 6. 4 中 TU 比 SU）。

莱布尼茨工作受到了纽汶提（Bernhard Nieuwentijdt）的批评，莱布尼茨 1695 年在刊于《教师学报》的一篇文章中对此予以回击。他谈到"过分苛刻"的批评者，并说过分的审慎不应使我们抛弃创造的成果。然后，他说他的方法不同于阿基米得方法之处，只在于所用的表达式，但他自己的方法更好地适用于发明的艺术。"无穷大"和"无穷小"仅仅表示需要多大就多大和需要多小就多小的量，这是为了证明误差可以小于任何给定的数，换句

话说，就是没有误差。人们能用这种终极的东西——无穷大量和无穷小量——作为一种工具，正如在代数里用虚根有极大的好处一样（此时我们应该回想一下在莱布尼茨时代虚数的地位）。

1699 年，莱布尼茨在给瓦里斯的一封信中给出了稍微有些不同的解释：

> 考虑这样一种无穷小量将是有用的，当寻找它们的比时，不把它们当作是零，但是只要他们和无法相比的大量一起出现，就把它们舍弃。例如，如果我们有 $x+dx$，就把 dx 舍弃。但是如果我们求 $x+dx$ 和 x 之间的差，情况就不同了。类似的，我们不能把 xdx 和 $dxdx$ 并列，因此如果我们要微分 xy，就可以写出 $(x+dx)(y+dy)-xy=xdy+ydx+dxdy$，但这里 $dxdy$ 不可比较地小于 $xdy+ydx$。因此，在任何情况下，误差都小于任何有限的量。

到这时为止，莱布尼茨表明他的微积分只用到通常的数学概念，但是由于无法使他的批评者满意，他提出了一个称为连续性原理的哲学原理。这个原理实际上和开普勒早已阐述过的几乎一样。在莱布尼茨研究微积分学的早期，1678 年 3 月 19 日给 H·康林（Herman Conring）的一封信中说，这个原理断言：“如果一个变量一直具有某一性质，则其极限也具有同一性质。”

在 1687 年给培尔（Pierre Bayle）的一封信中，莱布尼茨更充分地表述了这个原理：“在任何假定的向任何终点的过渡中，允许制定一个普遍的推论，使最后的终点也可以包括进去。”然后他运用这个原理为抛物线 $y=x^2$ 计算 dy/dx，在得到$\frac{dy}{dx}=2x+dx$ 后，他说：“现在，因为按我们的假设，允许在一个普遍的道理下，也包括纵坐标 x_2y_2 越来越向确定的纵坐标 x_1y_1 靠近并最终与它重合的情形（如图 6. 5）。很明显，在这种情况下 dx 成为 0 并且应该被忽略掉……”莱布尼茨没有证明当 dx 为 0 时，应该给予方程左边的 dx 和 dy 什么意义。

当然，他说，绝对相等的东西总有一个绝对是无的差别。

> 然而，一个过渡的状态或者一个消失的状态是可以设想的，其中实际上仍然没有出现完全的相等或者静止，……而是进入这样一种状态，即差小于任何给定的量，在这种状态下，还得留一些差，一些速度，一些角度，但他们每个都是无穷小。……
>
> 是否这样一个从不等到相等的瞬时过渡……能够保持在严密的或者形而上学的意义中呢？或者无穷大的扩展会越来越大，或者无穷小的扩展会越来越小，这是合法的考虑吗？目前，我承认这可能尚未解决。……
>
> 如果当我们说到无穷大（或者更严格些说，无限制的大）或者无穷小量（即在我们的知识中是最小的）时，就理解为我们意味着无限大的或者无穷小的量，即要多大就多大，要多小就多小，使得任何人得到的误差可以小于某个指定的量，那就足够了。
>
> 在这些假定下，我们在1684年10月的《教师学报》中列出的算法的全部规则，都能够不太麻烦地予以证明。

然后，莱布尼茨就讨论这些规则，但一点也没使它们更清晰。

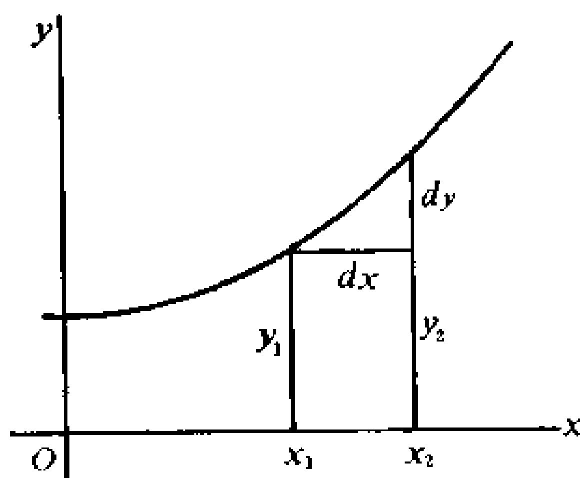


图 6.5

他提出的连续性原理的确不是，今天也不是一个数学公理。然而他强调它，并且给出许多与其相符的论据。例如在一封给瓦里斯的信中，莱布尼茨为他使用一个没有量的形式的特征三角

形，即量缩小为0之后，特征三角形的形式仍然存在作辩护，而且挑战性地反问道："谁不承认没有量的形式呢？"类似的，在1713年给格兰迪（Gvido Grandi）的一封信中，他说，无穷小不是简单的、绝对的零，而是相对的零，即它是一个消失的量，但仍保持它那正在消失的特征。然而，莱布尼茨在另外的时候又说，他不相信度量中真正的无穷大或真正的无穷小。

一直到1716年他去世，莱布尼兹一直在解释他那些无穷小量及无穷大量的含义，这些解释一点不比上面我们已经看过的更好。对他的微积分学，他自己一直没有清晰的明确的概念或是逻辑的判断力。

牛顿和莱布尼茨的推理竟会如此粗糙，这真令人吃惊。在他们着手研究微积分之前，其他伟大的数学家早已取得了可观的进展，他们两个人也都研读过前人的著作，事实上，牛顿的老师巴罗，就用几何方法得出了一些基础性成果。当牛顿说："如果说我比别人看得更远些，那只是因为我站在巨人的肩膀上"时，这不只是谦虚而是事实。至于莱布尼茨，他是最伟大的哲人之一，我们已提起过他在许多领域的贡献（见第三章），他智慧的深度与广度可与亚里士多德相媲美。当然，微积分涉及到许多新的，微妙的思想，即使是最富有创造力的头脑也未必能深刻理解他们自己的创造。

由于不能充分弄清楚概念和判别运算的正确与否，二人都依赖方法的多样和结论的彼此一致而大胆地向前推进，尽管并不严谨。莱布尼茨虽然比牛顿对批评敏感，但却不如牛顿严谨，莱布尼茨认为对他的做法最终验证取决于其有效性。他强调他所创造出的东西的程序性或算法上的价值，在某种程度上，他确信只要他能清楚地表述并且恰当地运用他的运算法则，就可以获得合理的，正确的结果，而不论所涉及的概念的意义是多么模糊。他就像笛卡尔一样地富有远见卓识，他看到了新思想的深层内涵，毫不迟疑地认为一门新科学即将诞生。

微积分的基础仍然不清楚，牛顿的支持者继续谈论最初比和

终极比，而莱布尼茨的追随者们则使用无穷小的非零量。由于这些不同方法的存在，更增加了建立合理逻辑基础的难度。许多英国数学家也许由于主要是仍然为古希腊几何所束缚，更关心微积分的严密性而不相信这两种方法，其他一些英国数学家选择了牛顿而不是数学做为研究对象，因此朝着严密化的方向没能有什么进展。这样，17 世纪就随着微积分、算术及代数的一片混乱结束了。

尽管面临众多的反对意见，但是，18 世纪伟大的数学家不仅极大地扩展了微积分学而且从中导出了一些全新的学科：无穷级数、常微分方程、偏微分方程、微分几何、变分法及复变函数，这些统称为分析的学科，现在是数学的核心部分。甚至连那些怀疑论者和批评家也在这些扩充中任意地使用各种类型的数和代数。微积分的运算，仿佛在逻辑基础上不再有任何问题了。

从微积分学到这些新分支的扩展引入了新概念、新方法，使得微积分的严密性问题更加复杂，对无穷级数的处理也许可以用来解释一下这些新添的麻烦。先让我们看一下无穷级数给数学家们带来的问题。

函数$\frac{1}{1+x}$可以写作 $(1+x)^{-1}$，把二项式定理用于后一种形式，可得

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4\cdots \qquad (8)$$

在这里，点表示这个式子按已列出的几项的形式无穷延续下去。无穷级数引入微积分的原义是用它们代替函数进行运算，比如说求导及求原函数，因为从技术上来说，用级数中较简单的项更易于进行这些运算。而且函数，例如 $\sin x$ 的级数还被用来计算函数的值，在所有这些用法中，最重要的是知道级数是否与函数相等。当 x 被赋予一个值时，函数也相应地有一个值，关于级数必须提出的第一个问题是：对于一个给定的 x 值，级数会得到一个什么值？换句话说，无穷级数的和意味着什么？我们又怎么去求它？第二个问题是：是否对所有的 x 值，级数都表示函数或者最少是对于使

函数有意义的值？

在他论述微积分的第一篇论文中（1669 年），牛顿自以为是地引入无穷级数来加快微积分运算的过程。因此，为了求 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 的积分，他用了二项式定理，得到

$$y=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$$

然后逐项积分，注意到如果用函数的另一种写法 $y=1/(x^2+1)$，则用二项式定理得到

$$y=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^8}+\cdots$$

他接着说道，当 x 足够小时，用第一个展开式；但当 x 较大时，就用第二个展开式。这样，他就对我们今天所称的收敛性的重要性有了些许认识，但他对此并没有明确概念。

用牛顿对他使用无穷级数的评价可以说明那个时代的逻辑，在 1669 年的这篇文章中他写道：

> 任何事情，只要是普通分析（代数学）能够通过有限多项的方程去做的（只要能做的话），也能够通过无限多项的方程（级数）去做，这就使我毫无疑问地把这后一种也称为分析。因为后一种推理的确定性不少于前一种，后一种方程的精确性也不少于前一种。不过，我们这些凡人的推理力量，是局限在狭窄的范围内的，所以既不能表达，也无法去想象方程的一切项，使得能够从中确知所求的量。

这样对牛顿来说，无穷级数只是代数学的一部分，是一种处理无穷多项而不是有限多项的较高级的代数。

在牛顿、莱布尼茨、贝努利家族、欧拉、达兰贝尔、拉格朗日和其他 18 世纪的数学家努力研究无穷级数的古怪问题，并把它用于分析之时，他们酿下了各种大错，做出许多错误的证明，因而得出许多错误的结论；他们甚至还给出了一些我们现在看来荒唐可笑的证明，我们可以略举一例以说明他们在处理无穷级数时

的迷惑与混乱。

当 $x=1$，表示 $1/(1+x)$ 的级数（8）

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4\cdots \tag{8}$$

变为

$$1-1+1-1+1\cdots$$

这个级数的和是多少？这个问题引起了无休无止的争论。把级数写成如下方式

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

看起来似乎很清楚，和就是零，然而，把级数写成另一种方式

$$1-(1-1)-(1-1)-\cdots$$

似乎同样很清楚，和为1。但如果用 s 代表级数之和，有

$$s=1-(1-1+1-1+\cdots)$$

或

$$s=(1-s),$$

因此 $s=1/2$。这最后一个结果也为其他证据所支持。这个级数是公比为 -1 的几何级数，而首项为 a，公比为 r 的无穷几何级数之和为 $\frac{a}{1-r}$，在上面这个例子中，和就是 $\frac{1}{1-(-1)}$，即 1/2。

格兰迪在他的小册子《圆和双曲线的方程》(1713 年）中，用其他的方法得到了第三个结果。他在方程（8）中令 $x=1$，得到

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots$$

便认为 $\frac{1}{2}$ 就是级数的和。他还认为，由于这个和也可以是 0，他业已证明，世界能够从空无一物创造出来。

在 1713 年的《教师学报》上发表的莱布尼茨写给沃尔夫(Christian Wolf)的一封信中，他也谈到这个级数，他同意格兰迪的结果，但他认为可以不借助于原来的函数求得这个结果。他认为，如果取级数的第一项，前两项的和、前三项的和等等，就得到 1，0，1，0，1……可以看出来，1 和 0 有同样的可能性，因此就应该取算术平均值为和，也就是 1/2，这也是最可能的结果，这

个证明为贝努利家族及拉格朗日所接受。莱布尼茨承认他的证明中形而上学的成分多于数学的成分，但他接着说，在数学中，存在我们通常承认的更为形而上学的真理。

在欧拉 1745 年的一封信和 1754 年（或 1755 年）的一篇论文中，他探讨了级数求和的问题。一个级数，如果不断增加其项数，它就能越来越逼近一个常数，就说这个级数是收敛的，这个常数就是它的和。按欧拉所说的，当一个级数的各项递减时它就是收敛的。反之，若级数的各项不减少，甚至增加，那么它就是发散的。他说，由于这种级数来自于已知的显函数，我们可以取这个函数的值做为级数的和。

欧拉的理论又导致了新的问题，他处理了下述展开式：

$$\frac{1}{(1+x)^2}=(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots$$

当 $x=-1$ 时，得到

$$\infty=1+2+3+4+\cdots$$

这个结果似乎是合情合理的。然而，当欧拉接着考虑函数$\frac{1}{1-x}$的级数时，也就是

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots.$$

让 $x=2$，那么

$$-1=1+2+4+8+\cdots$$

由于这个级数右边各项的和应超过上一个级数各项之和，欧拉得出结论：-1 比无穷大更大。欧拉同时代的一些人则认为负数大于无穷大不同于负数小于零。欧拉不同意这点，并且认为∞正像零一样把正数、负数分隔开来。

欧拉关于收敛与发散的见解并不正确，即使在他所处的年代里，从他所讲的意义上说，逐项递减的级数也没有和，而且他自己也用不是从显函数导出的级数进行研究。因此，他的“理论”是不完善的。此外，尼古拉·贝努利（Nicholas Bernoulli）在 1743 年给欧拉的一封信中，他一定向欧拉指出了同样的级数可以从不

同的展开式中得到，因此按欧拉的定义，必须给这个级数不同的值。但是欧拉在回复哥德巴赫（Christian Goldbach）的一封信中说尼古拉·贝努利没有给出一个例子来，他自己也不相信同一级数会出自两个确实不同的代数式。然而卡莱（Jean-Charles Callet）真的给出了一个这样的例子，拉格朗日试图去证明对它应当不予理睬，但后来人们看出这个证明是错误的。

再加上其他一些原因，欧拉对无穷级数的处理是不合适的。级数可以被微分或积分，它的微分和积分又导致函数的微分或积分，这样做的正确性必须加以证明。然而，欧拉宣称“无论如何，一个无穷级数可作为某些有尽的表达（函数的公式）的展开而得到，在数学运算中它可以用作与那些表达式等价的东西，甚至对那些使级数发散的变量也是如此。”因此，他说，我们能够保留发散级数的功用，并且保护其免受指责。

其他18世纪的数学家们也意识到必须区分我们今天所称的收敛级数与发散级数的特征，尽管他们对这种特征是什么一无所知。困难当然是在于他们研究的是一个新概念，像所有先驱者一样，他们必须在丛林中披荆斩棘。当然，为莱布尼茨、欧拉和拉格朗日所接受的牛顿的最初的想法，即级数只不过是长的多项式，因此应归到代数学范围内，是不能用来严格地讨论级数的。

在18世纪无穷级数方面的工作中，形式的观点占据统治地位。在他们的运算中，数学家们甚至憎恨任何限制，例如必须考虑收敛性。他们的工作产生了许多有用的结果而且他们也就满足于得到实用的支持，他们确已超越了他们所能给出正确理由的界限，但他们在运用发散级数时，总的来说，还是谨慎的。

虽然数系和代数学的逻辑处境并不比微积分的更好，数学家们还是聚焦于微积分并试图巩固其松散的逻辑基础。造成这种情况的原因无疑是到1700年时，各种类型的数看起来都很接近，也显得更自然一些了。然而微积分的概念，仍是陌生、神秘的，似乎难以接受。再说，在数的使用中没有什么矛盾，而在微积分及其扩展无穷级数与其他分支中，确实产生了矛盾。

虽然莱布尼茨研究微积分的方法更流畅也更便于使用，但就严格性来说，牛顿的方法实际上可能更容易些。英国人还认为可以将这两种方法与欧氏几何联系起来，从而保证其严密性，但他们混淆了牛顿的瞬间（moment，不可分割的增量）与他的连续变量的应用。大陆上的数学家们则追随莱布尼茨，并且力图把他的微分概念严密化。解释和评价牛顿与莱布尼茨的方法的书卷帙浩繁且谬误连篇，甚至经不起推敲。

数学家们尽管做出了种种努力来使微积分严密化，一些思想家还是抨击其合理性，尤以哲学家贝克莱为最。他害怕数学激发的机械论和决定论哲学信仰对宗教造成日益增大的威胁。1734年，他发表了《分析学者，或致一个不信教的数学家*，其中审查现代分析对象、原则与推断是否比起宗教的神秘与信条，构思更为清楚，或推理更为明显》一书。“先除掉你自己眼睛里的障碍，你才能看得清去擦掉你兄弟眼中的灰尘”。贝克莱抱怨数学家们的推理晦涩难懂、玄奥莫测，他们对自己的每一步既没有给出逻辑，也没有说明理由。贝克莱批评了牛顿很多的观点，他特别指出牛顿在他的论文《求曲边形的面积》中（用 x 作为我们用 h 表示的增量）进行了一些代数运算，然后又忽略了含 h 的项，因为 h 现在是零了（比较（4）式）。贝克莱说，这是对矛盾律**的蔑视，神学中不允许这样的推理。他说，一阶流数（一阶导数）似乎超出了人们的理解能力，因为它们超出了有限的范围。

> 如果一阶流数尚且不可理解，那么二阶、三阶或更高阶呢？那能够构想出开端的开端，抑或末尾的末尾的人……或许其睿智的大脑足以构想这一

* “不信教的数学家”指哈雷。据传，当时贝克莱的朋友病危但拒绝祈祷，说不信教的哈雷使他很难相信宗教教义。——译注

** 矛盾律是一条逻辑原理：一事物不能同时既属于又不属于一特定的类（如既是桌子又不是桌子），或者既处于又不处于一特定状态（如既是红的又不是红的）。——译注

> 切，但依我看，绝大部分的人会发现，想在任何意义上理解它们都是不可能的……我想，那些能消化得了二阶流数或三阶流数的人，是不会吞食了神学观点就要呕吐的。

谈到关于 h 和 k 的消失，贝克莱说："在我们假设增量消失时，理所当然，也得假设它的大小、表达式以及其他，由于它的存在而随之而来的一切也随之而消失。"至于被牛顿用瞬时量 h 和 k 的比弄得更复杂的导数，"它们既不是有限量，也不是无穷小量，但也不是无。我们只能称其为消失了的量的鬼魂"。

同样的，贝克莱也批评莱布尼茨的方法。在他早期的著作《人类知识原理》（1710 年出版，1734 年修订版）中，他这样攻击莱布尼茨的概念：

> 有一些著名人物，不满足于知晓一条有限直线可以分成无穷多个部分，还进一步认为每一个这样的无穷小量又可分成无穷多个部分，即二阶无穷小量（$(dx)^2$）等，他们总说有无穷小的无穷小的无穷小，没完没了，而另一些人则掌握了低于一阶的无穷小到空无一物。

他继续在《分析学者》里攻击莱布尼茨：

> 莱布尼茨及其追随者，在进行微分运算时，竟从不脸红地首先承认，然后又舍弃无穷小量。稍具思考能力的人，在理解时仔细些，在推理时公平些，就不会接受这样的估计。

贝克莱认为，从几何上来看，微分之比应该确定割线的斜率，而不是切线的斜率，忽略了高阶无穷小才消除了误差，因此，"依靠双重错误你得到了虽然不科学却是正确的结果"，这是因为错误互相抵消的缘故。他还挑中二阶微分，即莱布尼茨的 d（dx）作文章，因为 $d(dx)$ 是 dx 的微分，而 dx 本身是一个很难识别的量。

关于牛顿和莱布尼茨的方法，贝克莱反问道："难道我们这个时期的数学家也像科学家一样了吗？只花大气力去应用自己的理

论却不设法理解它们。”“在每一门其他科学中，人们用他们的原理证明他们的结论，而不是用结论来证明他们的原理”。

贝克莱用一连串的质问结束了《分析学者》一书，谨摘录若干如下：

> 那些对宗教如此敏感的数学家们会严谨认真地对待自己的科学吗？他们会不屈从于权威、不盲目轻信和相信那些不可思议的观点吗？他们就没有属于自己的秘密，甚至抵触和矛盾吗？

许多数学家回击了贝克莱的批评，但没人能成功地使微积分严密化。在这方面，欧拉做出了重大的努力。欧拉拒绝把几何作为微积分的基础，他试图纯粹形式地研究函数，即从它们的代数（分析）表达式来论证。他否定了莱布尼茨的无穷小概念，即所谓不等于零却小于任意一个给定值的数。在欧拉的《微分学原理》，1755年出版的一部18世纪的微分学经典著作中，他论证道：

> 无疑，任何一个量可减小到完全消失的程度。但是，一个无穷小量无非是一个正在消失的量，因为它本身就等于0，这与无穷小量的定义也是协调的，按照无穷小的定义，它应小于任一指定的量，它无疑应当就是无，因为除非它等于0，否则总能给它指定一个和它相等的量，而这是与假设矛盾的。

既然无穷小 dx（用莱布尼茨的记号）等于零了，那么 $(dx)^2$，$(dx)^3$ 肯定也为零，因为按惯例，这些量被称为 dx 的高阶无穷小。于是，对莱布尼茨来说，他的无穷小之比 dy/dx，在欧拉眼里即为 0/0，但 0/0 是多值的。欧拉的理由是任何数乘以零还得零，若用零作被除数，有 $0/0=n$。对所涉及的特定函数，通常求导数的方法即可决定比 $\frac{0}{0}$ 的值。他以函数 $y=x^2$ 为例，给 x 一个增量 h（他用 ω），此时，h 不为 0（比较前述（1）至（4）），得到

$$k/h=2x+h$$

此时，莱布尼茨允许 h 为无穷小，但不为 0，而欧拉说 h 就是 0，

所以在本例中比 k/h，即 $\frac{0}{0}$，等于 $2x$。

欧拉强调说，这些微分，即 h 和 k 的最终值，是绝对的 0，因为他只知道它们相互的比值最终化为一个有限值，此外推不出任何其他东西。在《原理》第三章中，欧拉更多地谈到这个性质，他在那儿鼓励读者说，导数并不像通常认为的那样隐藏着极大的神秘性，而那种神秘性使许多人心目中怀疑微积分。当然，欧拉求导数的方法的正确程度并不比牛顿和莱布尼茨更高。

欧拉在他那形式的并非正确的对微积分的探讨中所做的贡献是将其从几何学中解放出来，并将其建立在算术和代数的基础上。这至少为最终将微积分的合理性建立在数的基础上开辟了道路。

18 世纪后期，对建立微积分基础最雄心勃勃的尝试来自拉格朗日。像贝克莱及其他人一样，他认为微积分是由于相互抵偿才得到正确结果。在他的《解析函数论》（1797 年初版，1813 年再版）中，他完成了他的重建工作。这本书的副标题是："包含着微积分的主要定理，不用无穷小或正在消失的量，或极限与流数等概念，而归结为有限量的代数分析艺术"（着重号为拉格朗日所加）。

拉格朗日批评牛顿的方法时指出：关于弦与弧的极限比，牛顿认为弦与弧不是在它们消失前或消失后相等，而是当它们消失时相等。拉格朗日正确地说明：

> 此方法有很大不便，即它把所考虑的量不再是量的状态下，仍看作是量。因为对两个量，只要它们还保持有限，就总可以适当地构想出它们的比，可一旦它们都变为无，这个比在我们脑海里就不再提供任何清晰而明确的想法了。

他同样地不满意莱布尼茨的无穷小量和欧拉的绝对零，这两者"虽然在实践中是正确的，但作为一门科学的基础仍不够清晰，因为科学的确定性应基于自身的证据"。

拉格朗日想给微积分提供类似于古人论证那样的全部严密

性，并且他提出要把微积分归结为代数来做到这一点。特别是，拉格朗日提出用无穷级数（级数被认为是代数的一部分，但其逻辑比微积分的逻辑更为混乱）来严格地奠定微积分的基础。然后他“谦虚”地说，他的那种方法竟没有被牛顿想到，实在不可思议。

我们无需去追究拉格朗日所搞的微积分基础的细节，除了完全不合理地使用无穷级数外，他只做了一大堆代数推导，而这些，更不利于让读者明白合理的导数定义有多么缺乏。实际上，他所做的与他的前辈一样的粗糙，拉格朗日确信他已省却极限概念且已将微积分建立在代数之上。尽管他存在错误，其基础仍被他的许多杰出继承者所接受。

在写于1797—1800年的一部很有影响的三卷本著作《微积分学教程》中，拉格朗日的追随者拉克鲁瓦（Sylvestre-Francois Lacroix）确信微积分仅仅只是代数的扩充。在《教程》的一卷本（1802年）中，拉克鲁瓦用到了极限理论（从这点上看，这个理论那时已被理解），但他说只是为了节省篇幅。

19世纪初的一些英国数学家决心接受先进的大陆的分析工作。巴贝奇（Charles Babbage）、赫歇耳（John Herschel）和皮科克（George Peacock），他们作为剑桥的毕业生成立了分析学会，翻译了拉克鲁瓦的《教程》一卷本，并在前言中写到：

> 现在我们将拉克鲁瓦著作的译本献给公众，可以视其为他在微积分学方面伟大工作的缩略，虽然在基本原理的证明中，达兰贝尔的极限理论替代了拉格朗日极其正确的自然的方法，但后者在这本书的三卷本中被采用了……

皮科克声称极限理论令人难以接受，因为它把微分的原理与代数分隔开来，赫歇耳和巴贝奇也同意这种观点。

在18世纪后期，数学界很清楚微积分急需合适的基础。在拉格朗日的提议下，柏林科学院数学分部（1766—1787年拉格朗日任主任）于1784年设立，并于1786年颁发一个奖项，以奖励对数学中的无穷问题的最佳解答。这个竞赛的宣言如下：

> 数学的功用，它所受到的尊敬，“精确科学”这一极为贴切的桂冠，源于其原理的清晰、证明的严密及定理的精确。
>
> 为了确保知识体系中这一精致部分这些富有价值的优势，需要对其所谓极限问题有一个清晰、精确的理论。
>
> 众所周知，高等几何（数学）经常使用无穷大和无穷小，然而，古代的几何学家甚至分析学者煞费苦心地去避开导致无穷的任何事物，一些当代著名分析学者则承认无穷量的术语是矛盾的。
>
> 因此，科学院期望一个解释来说明为什么从一个矛盾的假设却推出了那么多正确的理论，还希望有一个确切、清晰的描述，简而言之，一个真正的数学原理。它也许可以完全代替无穷，却又不致使按其方法进行的研究过分困难或过分冗长，这就须要处理这个课题时有尽可能的普遍性，尽可能的严密、清晰和简洁。

这次竞赛面向除科学院的正式成员以外的所有人，总共有23篇应征论文，竞赛的正式结果如下：

> 科学院收到了许多关于这个课题的论文，它们的作者都忽略了解释为什么从一个矛盾的假设，比如无穷大量，推出那么多正确的结论。他们都或多或少地忽略了对清晰性、简洁性的要求，还有竞赛所要求的严密性。多数论文甚至没有看出来所寻求的原理不应局限于微积分，而应扩展到用古代的方法研究的代数和几何中去。
>
> 科学院认为我们的问题没有得到满意的答复。
>
> 然而，我们也发现最接近目标的参赛者是一篇法语论文的作者，他题写的格言是“无穷，是吞没我们思想的深渊”。因此，科学院投票决定他得奖。

获奖者是瑞士数学家惠利尔（Simon L'Huillier），同年，即1786年，柏林科学院公布了他的论文《高等微积分的基本评注》。无疑，柏林科学院数学部的判断本质上是正确的，其他论文（除了卡诺的一篇，见第七章）甚至根本就没有尝试去解释为什么从错误的假设出发而建立的无穷小分析的理论是正确的。惠利尔的论文肯定是出类拔萃的，尽管其基本思想毫无新意而言。惠利尔说，他的文章表述了达兰贝尔仅仅构想出一个轮廓的思想（发表于《百科全书》及《杂集》的一篇文章《微分》）的发展。在《评注》开头的一章中，惠利尔一定程度上改进了极限的理论。他第一次在印刷品上引入 Lim 作为极限的符号。这样，他把导数 dp/dx 记作 $\mathrm{Lim}\Delta p/\Delta x$（我们的 k/h），但他对极限理论的贡献是微乎其微的。

尽管几乎18世纪的每位数学家都在微积分的逻辑上做了努力，或至少表示了他们的看法，其中也有一、两个走对了路的，但他们所有的努力都是没有多大用处的。任何棘手的问题都被有意避开或是漠然视之，人们很难区别很大的数与无穷数，看起来似乎很清楚适用于任何有限数 n 的理论，当 n 无穷时也一定适用。同样，差商 k/h（见（3）式）被导数所代替，有限项的和（见（7）式）与积分也很难区分。数学家们在有限与无限之间随意通行，他们的工作可以用伏尔泰对微积分的描述来概括，他称微积分为"计算与度量一个其存在性是不可思议的事物的艺术。"一个世纪来，尤其是欧拉、拉格朗日这样的大师使微积分严密化的努力的最终结果，误导了他们的同代人以及后来者，并且搞混了他们的思想。总的来说，他们那么明目张胆地犯错，以致于人们对数学家能否弄清他们所涉及到的逻辑感到绝望。

数学家们相信符号远胜于相信逻辑，因为无穷级数对于所有的 x 值有相同的符号形式，使得级数发散或收敛的 x 值之间的不同看起来并不须要加以注意，而且即使人们承认有些级数，比如说 $1+2+3+\cdots$，和为无穷，数学家们倾向赋予这个和以意义，而不去怀疑其可适用性。当然，他们完全清楚对某些证明的需要。我

们已经看到了欧拉的确曾力图证明他使用无穷级数的正确性，而且他和拉格朗日还有其他一些人还尝试建立微积分的基础。但这些求得严密性——其标准随时间而变——的少许努力并没有在这个世纪成功，人们也几乎情愿选择这样一种得过且过的处世哲学。

18 世纪的思想家们所采用的论据的一个奇怪的特点是它们求助于形而上学，人们用它来暗示数学领域之外还存在一个真理体系，如果需要的话，可以用它来检验他们的工作。虽说它究竟是什么还不清楚，但应用形而上学意在给那些不为推理所支持的论点增强可信度。因此，莱布尼茨宣称形而上学的用处比我们认识到的要多。他把 1/2 作为级数 $1-1+1-\cdots\cdots$ 的和的证明和他提出的连续性原理，都只不过重申了上述观点。它们被“证明”是形而上学的，仿佛这样就不容置疑了。欧拉也求助于它，认为在分析中也必须默认它，当 17、18 世纪的数学家们不能为一个观点提供更好的证明时，他们就惯于说这其中的理由是形而上学的。

因此，在 18 世纪结束之际，微积分和建立在微积分基础上的分析的其他分支的逻辑处于一种完全混乱的状态之中，事实上，可以说微积分基础方面的状况，在 1800 年比 1700 年更差。数学巨匠，尤其是欧拉和拉格朗日给出了不正确的逻辑基础。因为他们是权威，他们的许多同事接受了并不加批判地重复他们提出的观点，甚至在他们所给出的基础上进一步发展。其他稍逊一筹的数学家则对此颇有微辞，但他们充满信心地认为只须稍加澄清或小修小补就可以得到一个完全清晰明确的基础。当然，他们被引上了一条错误的路。

第七章　不合逻辑的发展：19 世纪的困境

噢，上帝，为什么二加二等于四？

——亚历山大·蒲柏

历史进入 19 世纪，数学陷入更加自相矛盾的处境。虽然它在描述和预测物理现象方面所取得的成功远远超出人们的预料，但是，正如许多 18 世纪的人所指出的那样，大量的数学结构没有逻辑基础，因此不能保证数学是正确无误的。这种自相矛盾的情况在 19 世纪上半叶一直存在，同时许多数学家开始研究自然科学的一些新领域，而且成就斐然。但是数学的逻辑基础问题并没有得到解决，而且，对于负数、复数、代数和微积分及其扩展分析数学的批评仍然在继续。

让我们来回顾 19 世纪早期数学所处的困境。我们可以忽略那些依然存在的，对使用无理数的微不足道的反对意见。无理数，可被看作是直线上的点，它在直观上并不比整数、分数更加难以接受，它们和整数、分数遵循同样的规律。对于它的作用，人们没

有异议。所以，虽然无理数也没有逻辑基础，却被人们承认了。而真正遇到麻烦，直观上难以被接受的是负数和复数，它们在19世纪所遇到的攻击和非议，其剧烈程度不亚于18世纪。

威廉·弗兰德（Willian Frend），笛·摩根的岳父，曾就读于剑桥大学的耶稣学院，在他的《代数原理》（1796年）序言中直率地宣称：

> "用一个数减去比自身大的数是不可理解的，然而许多代数学家都这样做，他们称小于零的数为负数，认为两个负数相乘，其结果为正数。他们提出每一个二次方程都有两个根，这一点，初学者在任一给定的方程均可验证。他们用两个不可能存在的根使得一个方程可解，并试图找出一些不可能存在的数，这些数自身相乘后，得到单位元素1。所有这些都是荒诞不经的，并为通常思维方式所排斥。但是，从一开始采用这些理论就像其他虚构的东西一样，拥有了许多坚定不移的支持者，这些人喜欢对新生事物笃信不疑，对正统思想却深恶痛绝。"

1800年在马赛罗（Baron Maseres）出版的一本书中（见第五章）收录了弗朗德（Frend）的一篇文章。弗朗德在此文中批评了方程根的个数与其次数相等这一普遍规律，认为它只适用于所有根为正的少数方程。对那些接受此规律的数学家，他说："他们在努力找出方程所有的根，但实际上这是不可能的。为了掩盖自己所提出的规律的错误，他们不得不给一些数起一个特殊的名字。这样，至少在字面上可以使他们的规律看起来是正确的……"。

卡诺，法国著名的几何学家，其名著《关于无穷小分析的形而上学的思考》（1797年第一版，1813年修订版）被翻译成多种文字，使他在自己的工作领域之外声誉鹊起。他断言存在小于零的数的概念是错误的，作为一种在计算时有用、假想的东西，负数可以被引入代数，然而，它实际上并不是数，并且只能导致错误的结论。

18 世纪关于负数和复数取对数的争论使许多数学家非常困惑，以致于到了 19 世纪，他们仍对此喋喋不休。1801 年，剑桥大学的伍德豪斯（Robert Woodhouse）发表了一篇题为《关于一个借助虚构的数得到的结论的正确性》的论文。他在文中说道："在关于负数和复数取对数的争论中，许多数学家互相攻击对方理论时所指出的矛盾和谬误，都可以作为说明那些数不可用的证据。"

柯西，最伟大的数学家之一，在 19 世纪初创立了复变函数理论，也不同意把表达式 $a+b\sqrt{-1}$ 当作数。在他的名著《分析教程》（1821 年）中，柯西认为将这些表达式作为一个整体是毫无意义的。然而，它们还是说明了实数 a、b 的一些情况。例如，由方程 $a+b\sqrt{-1}=c+d\sqrt{-1}$，可推出 $a=c$，$b=d$，"每一个虚数方程仅仅是两个实数方程的符号表达式"。1847 年，晚年的柯西又提出了一个相当复杂的理论，可以用来判断用复数进行运算是否正确。但没有使用 $\sqrt{-1}$，对此，他说："我们可以毫无遗憾地完全否定和抛弃一个我们不知道它表示什么，也不知道应该让它表示什么的数。"

1831 年，著名的数理逻辑学家，并在代数领域有所贡献的笛·摩根在他的著作《论数学的研究和困难》中表示了对复数和负数的反对。他顺便说明自己这本书把当时牛津和剑桥使用的最好的书中的一切东西都包揽无遗。他写道：

> 虚数式 $\sqrt{-a}$ 和负数式 $-b$ 有一种相似之处，即只要它们中的任一个作为问题的解出现，就说明一定有某种矛盾或谬误。只要一涉及到实际的含义，二者都是同样的虚构，因为 $0-a$ 和 $\sqrt{-a}$ 同样是不可思议的。

然后，笛·摩根举一个例子来说明：父亲 56 岁，他的儿子 29 岁，问什么时候父亲的年龄是儿子的两倍？通过解方程 $56+x=2(29+x)$ 得到 $x=-2$，这个结果显然是荒谬的。接着他又说如果我们把 x 换成 $-x$，然后解方程 $56-x=2(29-x)$ 就得到 $x=2$。因此，他推断出：最初问题的提出就是错误的，答案为负数表明

第一个方程的列法是不正确的。

谈到复数，他说：

> 我们已经证明了记号$\sqrt{-a}$是没有意义的，甚至可以说是自相矛盾，荒谬绝伦的。然而，通过这些记号，代数中极其有用的一部分便建立起来了。它依赖了一个必须用经验来检验的事实，即代数的一般规则都可以应用于这些式子（复数），而不会导致任何错误的结果。要把这个性质求助于经验，那是与本书开头所写的基本原理相违背的。我们不能否认实际情况确实如此，但是必须想到这只不过是一门很大的学科中的一个小小的孤立部分，对于这门学科的其余一切分支，这些原理将完整地得到应用。

这里的原理，他指的是数学真理应该由公理经过演绎推理得出来。

接着，他对负根和复根加以比较：

> 在负的结果和虚的结果之间有截然不同的区别。当一个问题的答案是负的时候，在产生这个结果的方程里变换一下x的符号，我们就可以发现形成那个方程的方法有错误，或可证明问题的提法太受局限，因而可以扩展，使之容许一个令人满意的答案。但当一个问题的答案是虚的时候，得到的就不是这样了。

稍后，他又说：

> 对于支持和反对这种问题（如用负的量等等）的所有论据，我们不赞成采用完全介入的办法来阻止学生的进步，这些论据他们不能理解，而且论据本身在两方面都无确定结果；但是学生也许会意识到困难确实存在，这些困难的性质可以给他们指明，然后他们也许会考虑充分多的（分类处理的）例子，从而相信法则所导致的结果。

哈密尔顿，这位在其他领域也颇有建树的伟大数学家，也不

愿意接受负数和复数。1837年他在一篇文章中表明了他的反对意见：

> 毋庸置疑，当它从以下的原理出发（正如通常已是如此）时，复数和负数学说，很值得怀疑，甚至是不可相信的：小数可以减大数，其结果小于零；两个负数，或者说两个代表的量小于零的数可以相乘，其结果将是一个正数，即一个代表的量大于零的数；尽管一个数，不论其正负，它的平方（也就是自身相乘）总为正数，但我们却可以找到或者说想象或确定这样一类被称之为虚数的数，虽然其具有负的平方值，并因此而被假定为一类非正非负也非零的数，而它们所被认为代表的量既非大于零，又非小于零，更不等于零，尽管在此基础上逻辑形式可以建立成一个表示式的对称系统，而且通过正确应用有用的以此基础建立的规则，可以学会一种应用的技巧，但在这样一种基础上，哪里有什么科学可言。*

布尔，这位和笛·摩根同负盛名的逻辑学大师，在《思维规律研究》（1854年）中说：$\sqrt{-1}$是一个令人费解的符号，但是如果在三角学中运用它，我们就可以从可解释的表达式经过不可解释的表达式，而得到可解释的表达式。

使数学家们相信复数的不是逻辑，而是威塞尔、阿尔刚和高斯（见第四章）等人的几何表示。但是，在高斯的著作中，仍然能发现他并不愿意承认复数。高斯给出了代数基本定理（每个n次多项式方程有n个解）的四个证明。在前三个证明中（1799、1815、1816年），他处理的是实系数的多项式，他又预先假定复数与笛卡尔平面中的点是一一对应的，尽管没有明确地定义对应。实际上，

* 我们将在下一章中看到哈密尔顿对由复数所提出来的问题的态度。
——原注

在实数平面内并不能标出 $x+yi$ 的值，只能把 x，y 当作一个点的坐标标出。另外，高斯的证明并没有真正用到复变函数理论，因为他将涉及到的函数实部虚部分开了。1811 年，他在给贝塞尔的一封信中更明确地指出，$a+bi$ 可以用点（a，b）表示，在复平面上从一点到另一点有多条路径可走。如果从这三个证明和其他未出版的著作中显示的思想来判断，高斯无疑仍在关注复数和复函数的地位问题。1825 年 12 月 11 日，他在一封信中说自己不能从“负数和复数的玄奥中摆脱出来。$\sqrt{-1}$的真正意义始终在我脑海中显现，但是却很难用言辞把它表达出来。”

然而，如果说高斯还对自己和其他数学家是否承认复数心存顾忌的话，到 1831 年，他已经无所牵挂了。他公开陈述了复数的几何表示，在同年发表的一篇论文中，高斯非常清楚地将 $a+bi$ 表示为复数平面中一点，而且用几何方法实现了复数的加法和乘法（见第四章）。他又指出：虽然现在已充分理解了分数、负数和实数，但对于复数只是抱了一种容忍的态度，而不顾它们的巨大价值。对许多人来说，它们不过是一种符号游戏，但是，$\sqrt{-1}$的直观意思完全可以从复数的几何表示中得到，不需要增加其他什么就能将这些数归入算术的范畴。因此，高斯满足于这种直观理解，他认为，如果 1，-1，$\sqrt{-1}$不被称为正，负，虚单位，而是被称为直，反和侧单位，人们就不会觉得这些数非常晦涩难懂。他说几何表述将原本深奥的虚数变得清晰明白了。他引入术语“复数”与笛卡尔的术语“虚数”相对应，并用之代替 $\sqrt{-1}$。对当时同样重要的另一事实，即高斯自己和他的同时代人随意地使用没有事实基础的实数，高斯却未置一词。

在 1849 年的一篇论文中，高斯更加随心所欲地使用复数，因为他认为人们已经对复数很熟悉了，对此我们在以后还将提到。但是情况并不完全如此，复变量的复函数理论主要由柯西于 19 世纪的头 30 年发展起来并应用于流体力学，在这之后很长一段时间剑桥大学的教授们仍顽固反对有争议的 $\sqrt{-1}$，而且不惜采用各种麻烦蠢笨的方法避免它的出现和任何可能的使用。

19 世纪上半期，人们又注意到代数也缺乏逻辑基础，主要问题是字母被用来表示各类数并参与运算，好像它们具有正整数的所有令人熟知且易于理解的性质，而且任何数——负数、无理数，复数被字母代替时，运算结果都是正确的。然而，因为此类数还未被真正理解，它们的性质也是缺乏逻辑基础的，所以使用字母代替更不合理，但似乎字母代数表达式有其自身的逻辑性，否则无法理解它的正确性和有效性，因此在 18 世纪 30 年代数学家们着手处理用文字或符号表达式进行运算的正确性问题。

首先考虑这个问题的是剑桥大学的数学教授皮科克，他区分了算术代数和符号代数，前者是处理表示正整数的符号，所以基础牢固，它只允许运算结果为正整数；而后者，皮科克以为它采取了算术代数规则，但是除去了只适用正整数的限制，在算术代数中推出的全部结果与符号代数中的结果都一样，但算术代数中的表达式在形式上是普遍的，在数值上是特殊的；而符号代数中的表达式，从数值到形式上都是普遍的。例如，在算术代数中，式子 $ma+na=(m+n)a$，当 m，n，a 都为正整数时成立，因而在符号代数中，对于所有的 m，n，a 均成立。与此类似，$(a+b)^n$ 的二项展开式中的 n 在代数计算中须为正整数，如果用不带末项的一般形式来表示，就对所有 n 均成立。皮科克的论证被称为等价型的永恒性原理，是他在 1833 年给皇家科学促进会题为《关于分析的某些分支的新近成就和理性的报告》中提出的，他武断地肯定：

> 无论什么代数的型，当符号在形式上是普遍的，而在数值（正整数）上是特殊的时候是等价的，则当符号在值上和形式上都是普遍的时候同样是等价的。

皮科克特地用此原理去证明复数运算是合理的，他试图依靠“当符号在形式上是普遍的时候”来维护自己的观点。这样，人们就不能陈述仅属于 0 和 1 的性质，因为这些数具有特殊的性质。

皮科克在他的《代数论著》(1842－1845 年) 第二版中从公理

推出了他的原理。他明确讲到代数如同几何也是一门推理科学，因此代数的步骤必须根据法则条文的完全陈述，这些法则支配着步骤中用到的运算。至少对于代数这门演绎科学而言，运算的符号除了法则给予它的意义之外没有其他意义。例如，加法不过是表示服从代数中加法法则的任一步骤。他的法则是，例如加法和乘法的结合律和交换律，以及如 $ac=bc$ 而 $c\neq 0$，则 $a=b$ 这个法则。这里，从所采用的公理证明了型的永恒性原理。

在 19 世纪的大部分期间，由皮科克肯定的代数观点被接受了。格雷戈里，笛·摩根和汉克尔在支持它的同时，在小的方面有所改进。

这条原理基本上是主观推想的，它借助未必成立的假定来论证为什么不同类型数与整数具有相同的性质。虽然它的成立缺乏严密的逻辑性，但在实践运用上是正确的，所以被人们接受了。显然，皮科克、格雷戈里和笛·摩根认为他们创立了一门源于代数学却独立于实数和复数性质的科学。显然，将一些单凭经验的方法称为原理无助于改善其逻辑状况，正如贝克莱所说的："根深蒂固的偏见也常常会演变为原理，这些性质一旦获得了原理所具有的力量和声望，不仅它自身，而且由它推出的任何结论，都会无需验证而被人们接受。"

型的永恒性原理将代数看作是一门由符号和关于符号组合定律组成的学科，这种基础不仅含糊不清，而且不能变通。它极力主张算术代数和一般算术的严格对等性，照此办理将会破坏代数的普遍性，他们似乎从未认识到一个公式对于符号的一种解释是正确的，对于另一种可能就是错误的。碰巧，这条原理由于四元数的产生而失效，因为这些数（现在称之为超数）不具备乘法的交换性（见第四章），从而代表超数的字母也不具有实数、复数的所有性质，这样，这条原理就不成立了。代数不是只有一种，而是有很多种；只有证明了字母所表示的数具有字母被赋予的所有性质，建立在实数和复数基础上的代数才能成立。上述两个问题，皮科克和他的支持者都没有认识到，而引入四元数后不久就显而

易见了。

除了代数，19 世纪早期的分析也处于逻辑困境中。拉格朗日为微积分打下的基础（见第六章）并未得到所有数学家的认同，一些人退回到了贝克莱的立场，其余人则认为错误是相互抵偿的。卡诺就是后者之一（他也是法国大革命时期的军队领袖），在他的著作《关于无穷分析的形而上学的思考》中，他的形而上学“解释”错误的确相互抵偿。经过对当时各种解决微积分问题的方法的仔细推敲，卡诺得出结论：尽管现在的各种方法，包括达兰贝尔的极限概念的运用，实际上和古希腊的穷竭法都是等价的，但是无穷小的方法更为迅捷。卡诺对于微积分概念的澄清作出了一定的，但不是最主要的贡献。另外，他将牛顿、莱布尼茨和达兰贝尔的观点和希腊的穷竭法联系到一起时，作了错误的解释，因为在古希腊几何、代数学中找不出与导数有关的概念。

分析中的错误在 19 世纪继续发展，这方面的例子不胜枚举，但举一两个就足够了。所有分析的基础就是连续函数和函数导数的概念。直观上，连续函数可用一条不间断画出的连续曲线来表示（见图 7.1）。而函数导数的几何意义就是曲线上任意一点 P 处切线的斜率。直观看来，一个连续函数应在任何一点都有导数存在，然而，一些 19 世纪早期的数学家都超然于直观证明之外，而尽可能地用逻辑方法来说明。



图 7.1

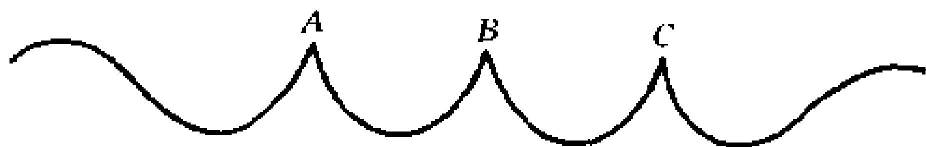


图 7.2

不幸的是，如图 7.2 所示，一个在 A、B、C 处有隅角的连续

函数在这些点处没有导数存在。然而，1806 年安培(Andre－Marie Ampère)“证明”了任何函数在所有的连续点上都有导数。其他类似的“证明”可在拉克鲁瓦的三卷本名著《微积分学教程》和几乎所有 19 世纪主要著作中找到。直到 1875 年，贝尔特朗 (Joseph L. F. Bertrand) 才在一篇论文中“证明”了可微性。然而，所有这些“证明”都是错误的。其中一些数学家情有可原，因为在很长一段时期内函数的概念没有很好地建立起来，但是大约到了 1830 年，这方面的缺陷已得到了弥补。

连续性和可微性是分析的基本概念。从 1650 年至今，分析一直是人们研究的主要对象。而数学家们对这些概念的认识竟然如此模糊不清，对此你就不能不感到震惊。一个严重的错误在今天对一个学数学的大学生来说都是不可原谅的，然而犯错误的人却是当时的伟人——傅立叶、柯西、伽罗瓦、勒让德、高斯，还有其他一些名声稍逊，但也成就斐然的数学家。

19 世纪的教科书仍然随意使用可微、无穷小等意义不明，在既是零，又不是零这一点上前后定义不一致的术语，当时学生对微积分困惑不解，他们所能做的也只是遵循达兰贝尔的告诫：“坚持，你就会有信心。”罗素，1890—1894 年曾就读于剑桥三一学院，他在《我的哲学发展》中写道：“那些教我无穷小分析的老师找不出有说服力的论据来证明微积分的基本概念，就只好说服我充满信心地去接受那些公认的诡辩。”

17、18、19 世纪一直困扰数学家们的逻辑问题，在分析中表现得尤为严重，特别是在微积分和以微积分为基础的无穷级数、微分方程等领域。然而，在 19 世纪早期，几何又一次成为人们热衷的研究目标。欧氏几何被扩展了，几何学的一个新分支——射影几何*首先被庞斯莱 (Jean-Victor Poncelet) 正确地预见到了它的前景。虽然庞斯莱和其他人提出了许多理论，但从其早期历史来

* 射影几何主要研究一个图形从一个位置投影到另一个位置时，其性质保持不变的问题。例如，一个二维实景通过照相机镜头投影到胶片上。 ——原注

看，这些理论的证明要比提出它们困难得多。当时，主要是借助于17世纪笛卡尔和费马的工作成就，几何结论可用代数方法来证明，但是，19世纪初期的几何学家对此不屑一顾，他们认为代数方法和几何方法格格不入，完全相异。

为了用纯粹几何学方法“建立”结果，庞斯莱提出了连续性原理，在他的《论图形的射影性质》中他是这样说的：“如果一个图形从另一个图形经过连续变化得出，并且后者与前者一样的一般，那么可以马上断定，第一个图形的任何性质第二个图形也有。”怎样判定这两个图形都是一般的呢？他没有解释。

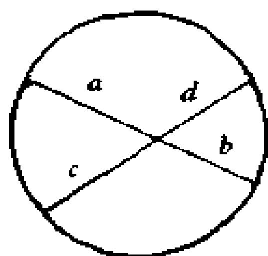


图 7.3

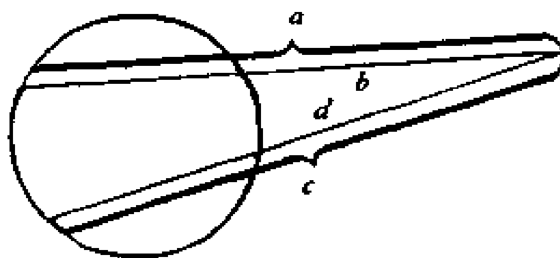


图 7.4

为了“证明”此原理的正确性，他举出欧氏几何中图的相交弦的两段之积相等这条定理（如图 7.3，$ab=cd$）并指出：当交点移到圆外时，会得到割线与其圆外段之积相等的定理（图 7.4）。不需其他证据，连续性原理就可以保证这条定理的正确性。另外，当一条割线变成切线时，切线与其圆外段变得相等，它们的积仍等于另一条割线与其圆外段的积（$ab=c^2$，见图 7.5）。庞斯莱用来论证连续性原理的结论刚好是三个独立完美的定律，能够满足和说明他的原理。庞斯莱杜撰了“连续性原理”这个术语，并把此原理抬高成绝对的真理，在他的那本著作中大胆应用，“证明”了射影几何中的许多新定理。

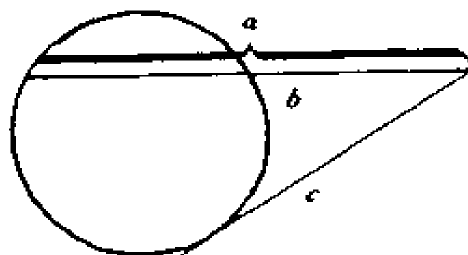


图 7.5

这原理对庞斯莱来说其实不是新的。在广义的哲学意义下，可

以追溯到莱布尼茨，他在解决与微积分有关的问题时就用到了这个原理（见第六章）。此后这个原理只是偶而提到，直到蒙日（Gaspard Monge）为了建立某些特殊类型的定理才复苏了它。他首先对一个图形的物理位置证明了一个一般的定理，然后声称这定理是普遍成立的，甚至该图形里的某些元素变成“虚”的时候也成立。例如，要证明关于直线与曲线的一个定理，他就在直线与曲线相交时证明，然后声称既使直线与曲线不相交，交点变成虚时，结论也成立。巴黎科学院的一些院士批评连续性原理，认为它只具有启发的意义，特别是柯西，他说：

> 这条定理严格说只是依靠将某一限定条件下成立的定理扩展到没有限定条件情况下时归纳出来的。用于二阶曲线时，它使人得到确切的结论，但是，其不具备普遍意义，因而不能随意用于几何学，甚至分析学中的各类问题，否则就会犯一些明显的错误。

但遗憾的是，柯西用来攻击这个原理的正确性的例子，却可以用别的方法证明完全为正确。

批评者指出，庞斯莱等人对这原理的信心其实是来源于它有代数上的依据。事实上，庞斯莱在俄国狱中的笔记表明他的确曾用代数学来检验过原理的可靠性。庞斯莱也承认其证明是建立在代数学基础之上的，但他坚持认为这原理并不依赖于这样一个证明。然而可以相当肯定的是，庞斯莱依靠了代数的方法去弄清事情的究竟，然后又以这原理为依据来肯定几何的结果。

在19世纪，尽管存在一些批评意见，连续性原理由于它直观易懂还是被人们接受并且作为一种证明方法得到广泛应用，尤其是几何学家，随心所欲地使用它。然而，从数学逻辑发展角度来看，连续性原理只不过是为了解决当时人们用纯推理方法不能解决的问题而提出的一个武断、偏颇的假定，提出这条原理是为了满足直观性和形象性的要求。

庞斯莱对连续性原理的主张和应用只是数学家们为了证明他

们用正当手续不能证明的定理的一个例子，但是逻辑困境依然存在于几何学的每一处。我们知道（见第五章），主要是 18 世纪末、19 世纪初非欧几何方面的研究工作，暴露了欧氏几何推理结构上的严重缺陷。然而，数学家们没有立即去弥补它，而是继续坚持它们的所谓绝对确定性。因为欧氏几何学定理的直观基础及实际应用提供了强有力的证据，甚至无人在意其缺陷。

对非欧几何来说，情况就不同了。19 世纪早期，除了非欧几何的创始人——兰伯特、高斯、罗巴切夫斯基、鲍耶之外，另外一些人也接受了非欧几何，他们以为自己创造了一门新的学科，尽管其逻辑基础不如欧氏几何那样牢靠。然而，特别是当高斯和黎曼在这方面所从事的工作为人们熟知后，不仅刚才提到的四人而且几乎他们所有的继承者在没有证明的情况下，都相信非欧几何是相容的，也就是说，其定理是彼此不矛盾的。他们都同意萨切利自以为得出矛盾的证法是错误的。

但是，非欧几何中的矛盾总有可能暴露出来。一旦如此，双曲几何中的平行公理假设就不成立，如萨切利所认为的那样，欧氏几何中的平行公理也就是欧氏几何中其他公理的推论。没有任何证据能够证明这种新几何的相容性和实用性，否则它至少会成为一个令人信服的论据，数学家们只能出于一种信念来接受前辈们认为是荒谬的结论。在非欧几何相容性问题上的疑问后来又持续了 50 年（见第八章）。

很明显，19 世纪任何一门数学在逻辑上都是得不到保证的。实数系、代数学、欧氏几何，新出现的非欧几何和射影几何，它们要么逻辑不完善，要么根本就没有。分析，也就是微积分及其扩展，不仅在缺乏实数和代数逻辑基础的情况下随意使用，而且在导数，积分，无穷级数中，一些概念也急需澄清。如果说数学没有一样东西是建立在牢固基础上的，此话一点也不为过。

从数学本身来讲，许多数学家对证明的态度真是令人难以置信。在 18 世纪，分析陷入了明显的困境，以致使一些数学家放弃了这个领域的严密性。因而洛尔认为微积分只是一些精巧的谬误

的集合，其他人则像吃不着葡萄的狐狸，极力嘲弄希腊人的严密性。克莱洛在《几何原理》中说道：

> 欧几里得自找麻烦地去证明什么两个相交的圆的圆心是不同的啦，什么一个被围于另一个三角形内的三角形，其各边之和小于外围三角形的各边之和啦，这是不足为怪的。这位几何学家必须去说服那些冥顽不化的诡辩论者，而这些人是以拒绝最明显的真理而自豪的；因此，像逻辑那样，几何必须依赖形式推理去反驳他们。

克莱洛又说道："但是一切都倒了个个，所有那些涉及到常识且早已熟知的事情的推理，只能掩盖真理，使读者厌倦，在今天人们对它已不屑一顾了。"

朗思基 (J. Hoëne-Wronski)，一位伟大的计算方法专家，但他不关心数学的严密性，表达了 18 世纪和 19 世纪初的这种观点。他的一篇论文被巴黎科学院的一个委员会认为缺乏严密性，而朗思基回答说，这是"迂腐，一种对达到目的的方法偏爱的迂腐"。

拉克鲁瓦在三卷本《微积分教程》第二版序言中说，"希腊人所烦恼的这种琐碎的东西，我们不再需要了。"当时典型的态度是，为什么要自找麻烦，用深奥的推理去证明那些人们根本没有怀疑过的东西呢？或者用不太明显的东西去证明较为显然的东西呢？

甚至到了 19 世纪，雅可比（在他未完成的关于椭圆函数的著作中留有许多疑点）还说，"要达到像高斯那样的严密，我们没有时间。"一些人公然蔑视那种没必要的证明，大多数人并不关心问题的严密性。他们经常说的一句话是，传统阿基米得方法认为是严密的，而用现代方法则不是。这在希腊数学中所没有的微分学的工作中显得尤为突出。达兰贝尔 1743 年说"直到现在……人们总是热衷于扩大数学的范畴，却很少阐明其来源，注重向高层次发展，而很少考虑加固其基础。"这句话对整个 18 世纪和 19 世纪初的数学工作做了很好的注释。

到 19 世纪中期，对证明的考虑更少了，以至于一些数学家甚

至不愿意费脑筋去证明他们原本就可以充分证明的东西。杰出的代数几何学家、矩阵代数的发明者凯莱发表了关于矩阵的一个定理，现在称为凯莱—哈密尔顿定理（一个矩阵就是一些数字的矩形排列，在方阵中每行每列都有 n 个数字）。他证明了他的定理对 2×2 阶矩阵是正确的，并在 1858 年的一篇论文中说："我认为没有必要对一般 $n\times n$ 阶矩阵去费力证明这个定理。"

西尔维斯特(James Joseph Sylvester)，杰出的英国代数学家，曾在 1876 年至 1884 年期间任英国霍普金斯大学教授。上课时他总是说，"我还没有证明这个结果，但我能像肯定任何必然事物一样肯定它。"然后他用这个结果证明新的定理，但是他经常又在下一次课结束前承认他上节课所肯定的结果是错误的。1889 年他证明了一个关于 3×3 阶矩阵的定理，但仅仅指出了对 $n\times n$ 阶矩阵证明此定理时必须考虑的几点。

考虑到欧几里得在处理几何和整数时的良好开端，数学这种不合逻辑的发展就提出了这样一个问题：为什么数学家们要如此徒劳无功地去使后来的发展——无理数、负数、复数、代数学、微积分及其扩展逻辑化？我们已经注意到（见第五章），就欧氏几何和整数而言，这些都是非常明显和直观易懂的，因此更容易发现基本原理或公理，从中又能得到其他性质，尽管欧氏几何的发展也存在一些缺陷。另一方面，无理数、负数、复数、字母运算和微积分概念却极其难以掌握。

还有更深一层的原因。数学大师们对数学的本质无意识地做了微小的改变，到 1500 年左右，数学概念成了经验的直接理想化或抽象化。那时，负数和无理数已经出现并被印度人和阿拉伯人所接受。然而，尽管他们的贡献得到人们的承认，但就证明而言，他们只满足于直觉和经验证明。而且当时复数、使用字母的广义代数，微分和积分的概念纷纷进入数学，这门学科由于人们大脑深处的概念而处于统治地位。特别是导数或瞬间变化率的概念，尽管速度这个物理现象有直观基础，但还远不是理性的产物，它在本质上完全不同于数学三角形。同样对希腊人谨慎避开的无穷大

量和巧妙地防止其出现的无穷小量，以及负数、复数在理解时所做出的努力也是勉为其难的。这是因为数学家们没有认识到这些概念不是来自于直接经验，而是心智的创作。

换句话说，数学家们是在贡献概念而不是从现实世界中抽象出思想，究其成因，他们是将感性知识转变为理性知识。由于这些概念被证明越来越实用，数学家们起初还忸怩作态，后来就变得肆无忌惮了，久而久之，人们也就认为这是无可指责且理所当然的了。从 1700 年起，越来越多的从自然中提取和在人思想中产生的观念进入数学领域并几乎被毫不怀疑地接受，由此引起的不良后果终于促使数学家们不得不从现实世界之上去审视他们的这门学科。

因为他们没有认识到新概念特征的变化，他们也没有认识到他们所需要的是公理化发展的基础，而不是那些自明的真理。当然，新概念要比旧概念精致得多，而且就我们目前所了解的情况看，合适的公理基础并不容易建立。

那么，数学家们如何知道他们该往何处去呢？同时，考虑到他们的证明传统，他们怎么敢只用规则就能保证结论的可靠性呢？毫无疑问，解决物理问题就是他们的目标，一旦物理问题被数学公式化后，就可利用精湛的技巧，从而新的方法和结论就出现了。数学公式的物理意义引导着数学的步骤，也经常给数学步骤提供部分论据，这个过程在原理上同一个几何定理的论证没有什么差别。在证明几何定理时，对图形中一些显而易见的事实，尽管没有公理或定理支持它们，还是被利用了。

除了物理思维，在所有新的数学工作中，还有强烈的直觉作用，基本概念和方法总是在对结论合理的证明以前很久就被直觉捕捉到了。杰出的数学家，不管他们怎样恣意妄为，都有一种本能，即保护他们自己免遭灭顶之灾。伟大人物的直觉比凡人的推演论证更为可靠。

由于某些数学公式能抓住物理问题的本质，18 世纪的数学家们特别热衷于公式。显然，对他们来讲公式是如此的富有吸引力，

以至于他们认为仅通过用像微分和积分这样的形式化运算，从一个公式到另一个公式的推导就足以证明它的正确性了。符号的魔力泛滥，耗尽了他们的理性。18世纪被称为数学史上的英雄时代，因为这个时期的数学家们在几乎没有逻辑支持的前提下，勇于开拓并征服了众多的科学领域。

但是我们仍然心存疑问，尽管数学家们，特别是在18世纪知道微积分的概念不清而且证明不充分，他们却那么自信他们的结果是正确的。部分答案是由于有许多结果被经验和观测所证实，其中最突出的是天文学的一些预言（见第二章）。但是另一个有关的因素导致17和18世纪的人们相信他们的工作，那就是他们确信上帝已经数学化地设计了世界，而数学家们正在发现和揭示这种设计（见第二章）。尽管17世纪和18世纪的人们的发现是不完全的，但他们认为它是基本真理的一部分。他们正在展示上帝的杰作并将最终达到永恒真理的彼岸。这样一种信仰支撑着他们的精神和勇气，而丰硕的科学成果则是养育他们的心智和使他们能够不懈追求的精神食粮。

数学家们所发现的只是寻觅中的宝物的一部分，但却富含着更多宝物将被发现的启示。如果应用起来如此精确的数学规律却缺乏精确的数学证明的话，那么还需不需要诡辩了呢？由科学论据支持的宗教信仰代替了虚弱的或者根本不存在的逻辑力量，他们渴望维护上帝的真理，致使他们不断地建造没有牢固基础的空中楼阁。他们用成功来安抚良心，的确，成功是如此地令人陶醉，以致于人们在大多数时间里忘记了理论和严密性。偶尔向哲学和神秘教义的求助掩盖了一些困难，以便它们不再显现。从逻辑上讲，17世纪，18世纪及19世纪早期的工作肯定是粗糙不堪的，但也不乏独创性。为了贬抑这些工作的成就，其中的错误和不准确处被19世纪后期和20世纪的人们不公平地强调了。

17、18世纪的数学就像一个经营大宗业务、却由于管理不善而招致破产的大公司。当然，顾客——购买并利用数学商品的科学家们和债权人——那些毫不犹豫地向数学股票投资的大众、并

不知道真正的财政状况。

所以，我们发现了极其荒谬的事情，在今天高度发展的数学的逻辑，当时却处于一种十分可怜的窘境。但数学在描述和预测自然方法上的成功给人的印象太深刻了，所以不仅仅是希腊人，所有18世纪的知识分子都公然支持宇宙是按数学设计的，且把数学作为人类理性的壮丽庄严的成果而极力颂扬。正如约瑟夫·艾迪生在《赞美诗》中对天体的赞美一样（见第三章），人们都沉浸在收获颇丰的喜悦之中。

现在我们回溯一下这种对数学推理的赞颂似乎令人难以置信，确切地讲，它们只是用到了推理的细枝末节。但特别在18世纪，当关于复数的意义和性质、负数和复数的对数，微积分的基础、级数的求和以及其他我们还没有描述的问题的热烈论战充斥文献时，我们称其为"战国"时代是比较合适的。到1800年，较之于逻辑合理性，数学家们更热衷于结果的确定性。从证明的观点来看，有结果，就能产生信念，我们将很快看到，正是19世纪后期的工作使其无愧于理性时代这个名称（见第八章）。

当大多数数学家满足于寻求新事物而忽视几何时，一些领袖人物醒悟到了数学的逻辑困境，杰出的挪威天才阿贝尔强调指出，分析正濒临绝境。在1826年给汉森教授的一封信中，他抱怨道：

> 人们可以在分析中轻易找到大量模糊不清的东西，你也许很奇怪会有那么多人去研究分析，那是因为它完全没有计划性、系统性。最糟糕的是它从来没有使人信服过。即使在高等分析中，也少有用逻辑上站得住脚的方式证明过的定理。人们可以到处发现这种从特殊到一般而得出结论的蹩脚方式，罕见的是这种方式却很少得出矛盾。

阿贝尔在1826年1月给他以前的老师霍姆伯的信中特别提到了发散级数：

> 发散级数是魔鬼的发明，把不管什么样的证明都建立在发散级数基础上是一种耻辱。利用发散级

> 数人们想要什么结论就可以得到什么结论，而这也是为什么发散级数已经产生了如此多的谬论和悖论的原因。……对所有这一切我变得异常关心，因为除几何级数外，在全部数学中曾被严格地确定出和的单个无穷级数是不存在的。换句话说，数学中最重要的问题也就是那些基础最不牢固的事情，尽管这种级数令人非常惊奇，但它们中的大多数都是正确的，我正试图为这种正确性寻找理由，因为这是一件饶有趣味的事情。

就像对一般人来说，借酒消愁并不能真的化解烦恼一样，数学在物理学中取得的成就也不能使某些数学家漠视其逻辑困境，许多大胆的探索者坚信他们所发现的是上帝的设计，但是由于 18 世纪后期这种信念被人们所抛弃，所以他们从中获得的安慰也变得毫无价值（见第四章）。失去了信念的支持，他们不得不重新检验自己的工作，可是他们面对的是模糊不清、证据不足、自相矛盾，甚至是完全的是非混淆。他们认识到数学并不像过去所认为的是推理的典范，不过是用直觉，几何图形，特别是形的永恒性原理之类的原理和求助于被证明可以接受的形而上学来取代推理而已。

建立逻辑结构的理想是由古希腊人明确提出来的，为数不多的几个在算术、代数和分析方向上为之努力的数学家都被这样一种信念所激励着，即数学家们至少已经在某一重要领域——欧几里得几何上做出了成绩。他们认为既然别人能够丈量奥林匹克山，那么他们也可以做到。他们并没预见到，为所有现存数学提供严格基础的任务，远比 1850 年时数学家们所想象的要困难得多，他们更不会预见到另外一些麻烦。

第八章　不合逻辑的发展：天堂之门

现在人们可以说，绝对的严格已经达到了。

——彭加勒

数学批评运动的创建者们认识到，两千多年来数学家们只是在充溢着直觉，似是而非的证明以及归纳推理和符号表达式的形式运算的荒野上漫游，他们期望着能在一片空白上建立合适的数学逻辑基础，摒弃那些模糊的概念和矛盾，改进如欧氏几何这样的数学分支已有的基础。这项工作在19世纪20年代就已经开始了，并且，随着非欧几何渐为人知，也在愈加广泛地加速进行。它逐渐揭示出欧氏几何在结构上的缺陷，可以明显看出，过去被认为是严格证明的典范，无懈可击的堡垒，也经不起细致推敲。稍后，也就是1843年，四元数的产生又向实数、复数运算的自以为是提出了挑战。当然，还有一些对自己工作过于自信的数学家，继续粗劣地推理，一旦得到正确的结果，便更错误地相信他们的证明和理论是无懈可击的。

虽然严谨的思想家们承认必须摒弃数学是现实世界的真理的主张，但他们还是对数学在力学、地球力学、声学、流体动力学、弹性力学、光学、电磁学以及工程学的许多分支等诸多领域辉煌的成就感到由衷的敬佩。尽管数学是在真理战无不胜旗帜的庇护下，但它一定还借助了某种基本的，也许是神秘的力量才取得其成就。数学对自然的超常的适用性虽然还需进一步解释（见第十五章），但是，没有人能否认这一事实并胆敢把这样一种无所不能的工具弃置不顾。当然，它不应当受到由逻辑困难和矛盾所带来的混乱的威胁，而且，尽管数学家们一度违背了逻辑严密性的原则，但他们也不准备使他们的学科永远建立在实用的基础上。否则，他们的声望也将受到影响。

正因为如此，有一些数学家仓促之中又重新踏上了与原来截然不同的道路，从另一个角度去认识他们所开辟的数学世界。他们决心要竭尽全力构造，在某些地方是重建数学的基础。

欲使数学内部井然有序，须要采取一些有力措施。很明显，并没有坚实的土壤可供建立数学大厦之用。以前那些看上去十分牢固的真理基础，已经被证明是不可信的。也许构造另一种坚实的基础结构会稳固些，但就要求有完整的、字斟句酌的公理和定义，以及所有结论的明晰的证明，不管它们看上去是多么的显而易见。用逻辑的前后一致与彼此相容取代对实际情况的依赖，公理和定理互相照应，可使得整个大厦无懈可击。不管它建筑在什么样的土地上，都与基础紧密相依，尽管随风摇摆，却稳如泰山。

数学家们由建造微积分的逻辑开始，因为微积分是建立在实数系统和代数的基础上的，但这两者都没有逻辑基础。从纯粹逻辑的观点来看，这种步骤就像一个五十层的办公大楼塞满了家具和其他设备而楼主突然发现整个大楼摇摇欲坠，必须重建，于是他下令从第20层开始。

出发点选在何处颇有一番说道。我们都知道，在19世纪以前，各种类型的数被放肆应用，尽管没有逻辑基础，也没有人对其性质是否正确多加关注。神圣的欧氏几何虽然一直受到怀疑，但是

在实际应用中并没遇到任何麻烦。事实上，两千多年的可靠的使用确保了其未加证明的逻辑的正确性。另一方面，微积分是整个分析的源泉，在这个浩瀚的领域内，严格的证明，悖论甚至矛盾都出现了，而且并不是每个结论都能得到实际的认可。

在19世纪初，神父、哲学家、数学家波尔察诺（Bernhard Bolzano）、阿贝尔和柯西都认为微积分的严格化问题必须加以解决。不幸的是，波尔察诺在布拉格工作，因而他的著作几十年后方为人知。而阿贝尔27岁就去世了，所以其工作并不深入。只有柯西一直处于他那个时代数学界的中心。1820年时，他被认为是最伟大的数学家之一。正是柯西揭开了数学严格化运动的序幕，其工作受到广泛的注意，并且产生了深远的影响。

柯西决定在数的基础上建立微积分逻辑。为什么在数上呢?因为牛顿之后的英国人，曾尝试用几何学使微积分严格化，但失败了。对柯西来讲，很明显，几何学并不是合适的基础，而且，莱布尼茨之后的大陆人，一直尝试用分析的办法。在1820年时，尽管非欧几何鲜为人知，但是已使数学家们心存犹疑。而在另一方面，在哈密尔顿1843年引入四元数以前，实数系统里还没有发生过任何困扰数学家们的事儿，即使是四元数也不能威胁到实数系统的正确性。

柯西同样很明智地把微积分建立在极限的概念上。这一正确方法也被数学界思维敏锐者所推崇。17世纪的瓦里斯在其著作《无穷小的算术》（1655年）及苏格兰教授J·格雷戈里在他的《论圆和双曲线的求积》（1667年）中，还有18世纪的达兰贝尔都确信极限概念是合适的基础。其中达兰贝尔的观点是最为著名的，因为在他发表文章的时候，有牛顿、莱布尼茨、欧拉的工作可以借鉴。在他为《百科全书》（1751—1765）所撰写的条目“极限”中，明确认为：

> 当一个量以小于任何给定的量逼近另一个量时，可以说后者是前者的极限，尽管前者绝不会超过后者……。极限理论是微分学真正形而上学的基

础……

达兰贝尔在《百科全书》的另一条目“微分”中，讨论了巴罗、牛顿、莱布尼茨、洛尔和其他人的工作。他说，微分（无穷小）是一个无穷小量，它可小于任何给定的量。但他又解释说，他用这些字眼是为了使其与流行的用法一致。这一术语，他说是一种缩写形式，晦涩难懂，极限是正确的语言和方法。他批评牛顿用速度来解释导数，因为某一瞬时速度并没有清楚的概念，而且这里还引入了一个非数学的运动概念。在他的《杂记》（1767年）中，达兰贝尔再次指出，“量是物非物，若它是物则还未消失，若它非物，则已杳无踪影。”他再次提出极限概念，但是，他并没有将这一概念用于微积分，而且他的同时代人也未接受他的建议。

极限的思想还出现在卡诺的《反射》和惠利尔的获奖论文中，后者曾获柏林科学院一次竞赛的奖励。卡诺的文章虽未得奖，但也还说得过去，所以柯西很可能是受了他们的影响。不管怎样，在他著名的《代数分析教程》（1821年）引言里，他明确表示：关于这一方法，我将尽力达到数学中所能要求的全部严格。

尽管在这本教材的标题中有“代数”字样，但柯西反对当时所依靠的大多数代数。他的意思是说，他的同事总是假设，对实数成立的对复数也成立，对收敛级数成立的对发散级数也一定成立，对有限量成立对无穷小量也同样成立，等等。他是那样小心翼翼地定义和建立起微积分的基本概念：函数、极限、连续、导数和积分。他还把无穷级数分为有和的收敛级数与没有和的发散级数。当然，后来这一定义失效了。1826年10月，阿贝尔给他以前的老师霍姆伯的信中称柯西“是现在唯一一个知道怎样对待数学的人”。阿贝尔还补充说，柯西有点傻，也有点固执，但老天爷心里自有一杆秤。*

虽然柯西竭力使分析严格化，并在1829年他的《教程》再版

* 我们没有必要追究柯西提出的定义和定理的技术细节，我们的目的是要说明柯西所做的严格化的工作极为出色。　——原注

中声称他已经实现了最完全的严格，但是他处理的概念还是难以捉摸，他犯了许多错误。他关于函数，极限，连续和导数的定义基本上正确，但所用的语言模糊，不确切，与他的同事们一样。他认为连续即隐含着可微（见第七章），因而他建立的许多定理在假设中只要求连续，而在应用中却是可微的。即使他注意到犯了错误，也不改初衷。柯西在十分仔细地定义了定积分之后，接着就证明了每一个连续函数都是可积的。但是，他的证明是错误的，因为他没有考虑一致连续的要求。尽管仔细区分了收敛极数与发散级数，但他关于收敛级数的一些断言和证明是错误的。例如，他断言连续函数的无穷级数的和是连续的（没有一致收敛的话，这是错误的）。他把无穷级数逐项积分，认为积分级数就是原级数所表示函数的积分。这里，他又同样忽视了一致收敛的要求。他给出了被称作柯西条件的收敛序列的判定准则，但他不能证明这一条件的充分性，因为这需要他和他的同行们都不具备的实数系统的知识。柯西相信，如果一个双变量函数在它的两个变量分别趋近某一点时，它在这一点有一个极限，那么当这两个变量同时变化并趋近这一点时，它也一定有一个极限。

起初，分析严密化的工作曾引起了轩然大波，在巴黎科学院的一次科学会议上，柯西公开了关于级数收敛性的理论。会后，拉普拉斯匆匆返回家里避不见人，检查他在《天体力学》所用的级数。幸而，他发现每个级数都是收敛的。

有点荒谬的是，柯西并不愿被束缚于他自寻的严密化。尽管他写了三本旨在建立严密化的教科书（1821 年，1823 年，1829 年），但在他不断写出的研究论文中，他都忽视了这一点。他定义了连续性，但从未对他所使用函数的连续性加以证明。虽然他十分强调级数和广义积分收敛性的重要性，但在他与级数，傅立叶变换和广义积分打交道时，却从未考虑过收敛的问题。他把导数定义为一个极限，但他也给出了一个像拉格朗日给出的那样纯粹形式的方法（见第六章）。他承认了如 1－1＋1－1＋……这样的半收敛级数（振荡级数），并认为条件收敛级数（既有正项也有负项

的级数）可以重排。他还犯了一些其他错误，他对什么是真理心明如镜，却从未用自己教科书里所确立的标准来建立真理。

柯西的工作激励了他人更多促使分析严密化的工作，但是主要的成就还得归功于另一位大师魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass）。正是由于他的工作，分析的基本原理的严密化才得以完成。1858～1859年，他在柏林大学任教时，开始讲述关于基础的工作，而最早的记录是1861年春由许瓦尔兹（H. A. Schwarz）所做的笔记。魏尔斯特拉斯的努力终于使分析从人们久已置疑的完全依靠运动学、直觉理解和几何概念中解放出来。

魏尔斯特拉斯在1861年就清楚，连续并不隐含着可微。1872年他向柏林科学院提出了一个处处连续却无处可导的函数的例子（在1875年由杜布尔-雷豪（Paul du Bois Reymond）为他出版），这不啻是一声炸雷，动摇了人们头脑中根深蒂固的观点。早在1830年，波尔察诺就以几何形式给出了一个例子，但没有发表，塞莱里埃（Charles Cellérier）也在1830年左右给出了一个例子，但直到1890年才公布。

魏尔斯特拉斯的例子没有早出现是微积分发展史上的幸事，正如皮卡（Emile Picard）在1905年所说的那样："如果牛顿和莱布尼茨知道了连续函数不一定可导，微分学将无以产生。"的确，严谨的思想也可阻碍创造。

柯西，甚至魏尔斯特拉斯，在分析严密化工作之初，都把实数和复数系统看作是无懈可击的。是哈密尔顿，四元数的发明者，在1837年为实数和复数系统提供逻辑基础迈出了第一步。哈密尔顿知道复数可以用来表示平面向量，所以他寻求能表示空间向量的三元数（见第四章）。他将复数的性质进行推广，其结果刊于论文《代数偶：关于时间的引论》之中。然而，其中他假设实数具有熟悉的性质。为了替代复数中的$a+b\sqrt{-1}$，哈密尔顿引入了有序实数偶（a，b），并且他定义了数偶间的运算，以便和它们以$a+b\sqrt{-1}$形式运算时取得同样的结果。值得注意的是，哈密尔顿由此产生了寻找一套新复数理论的念头，因为同他的前辈们一样，他

对$\sqrt{-1}$甚至负数都感到不安。而后，在他的论文里，他写道：

> 呈现在这里的数偶理论是为了使（复数）的隐含意义充分体现。并且，由这一显著的例子说明，一些平常看上去只是简单符号，并无法理解的表达式，可以寓以实义。

在文章中，他进一步表示：

> 在单数理论中，符号$\sqrt{-1}$是无意义的（着重号为哈密尔顿所加），其只表示一种不可能的开方运算或纯粹一个虚数。而在数偶理论中，同样的符号$\sqrt{-1}$是有意义的，其表示一种可能的开方运算或实数偶，称作（像我们已经看到的那样）数偶（—1，0）的基本平方根。在这后一理论中，$\sqrt{-1}$可以被合理地使用，但在前一理论中则不行。我们可以把任一数偶（a_1，a_2）写作：
>
> $$(a_1, a_2)=a_1+a_2\sqrt{-1}$$
>
> ……在同样的表达式中，把$\sqrt{-1}$解释为第二单元，或者就是纯粹的第二数偶（0，1）。

这样，哈密尔顿清除了在复数系统中他所谓的“玄奥之障”。

哈密尔顿在他的数偶理论中，预先假定了实数的性质。在1837年他的论文中，他尝试给实数系统一个逻辑的结构。由时间的概念，他推出了正整数的性质，又扩展到有理数和无理数，但过于牵强。特别是关于无理数的处理，既模糊且错误百出，为数学家们所不齿。哈密尔顿对实数和复数的基础只是略加研究，他的重心在四元数。因此，像他那个时代的大多数人一样，他毫不犹豫地利用实数和复数的性质。

魏尔斯特拉斯第一个认识到如果不能更好地理解实数系统，也就不能使分析严密化。他第一个在我们熟识的有理数性质基础之上，给出了无理数的严格定义的性质。他在19世纪40年代就从事这项工作，但他没有及时发表，直到60年代他在柏林大学通

过授课才公之于众。

其他的几个人，著名的有戴德金和康托尔，顺理成章地在有理数性质之上，正确地定义了无理数并建立了它们的性质。他们的工作成果在70年代得以发表。戴德金像魏尔斯特拉斯一样，在讲授微积分时才认识到清晰的无理数理论的迫切性。在《连续性与无理数》（1872年）一文中，他这样写到，从1858年至今，他"比以往更迫切地感到，算术中缺乏严格的基础"。在他关于分析理论的工作中，康托尔也认识到了无理数理论的迫切性（见第九章）。这样，借助魏尔斯特拉斯的工作，戴德金和康托尔终于证明出 $\sqrt{2}\ \sqrt{3}=\sqrt{6}$。

无理数的逻辑还不完善。戴德金认识到这一点，并且，在《数的性质和意义》（1888年）一文中，他描述了可以作为有理数的公理方法的基本性质。皮亚诺（Giuseppe Peano）借鉴了戴德金的观点和格拉斯曼《算术教程》（1861年）中的一些观点。他在《算术原理》（1889年）中，从关于正整数的公理，成功地导出了有理数的结果。这样，实数和复数系统的逻辑结构已唾手可得。

作为一个副产品，数系基础的建立也解决了熟悉的代数学中的基础问题。为什么用字母代替实数或复数时，其可以像正整数一样进行运算，而结果丝毫不差呢？答案在于其他类型的数和正整数一样，具有同种形式上的性质。不严格地说，就是 $2\times3=3\times2$ 成立，同样有 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$ 成立。所以当 ab 被 ba 代替时，不管 a、b 代替的是正整数还是无理数，结果总是正确的。

数学史上这一系列事件的发生顺序是耐人寻味的，并不是按着先整数、分数，然后无理数、复数、代数学和微积分的顺序，数学家们是按着相反的顺序与它们打交道的。他们看上去是极不情愿地去处理那些本可以留在最后，并能很好地理解的数，他们非到万不得已才去进行逻辑化的工作。不管怎么说，大约1890年左右，在埃及人和巴比伦人能使用整数、分数和无理数的六千年后，数学家们终于可以证明 $2+2=4$。看来，即使是最伟大的数学家也被迫考虑严密性。

在19世纪下半叶，另一个瞩目的问题被解决了。从高斯确信他的非欧几何是相容的时候（这也许因为他认为非欧几何是物理世界的几何），到大约1870年，高斯在这方面的研究工作和黎曼的无薪教师就职报告得以发表近六十年间，大多数数学家并没有认真地考虑过非欧几何（见第四章），因为其内容过于偏激。数学家们宁肯相信，或者说是希望某一天能在非欧几何中发现矛盾，这样它们也就成了一纸空文。

幸运的是，所有的基本非欧几何的相容性问题都被解决了。方法经受住了检验，特别是后来创建的理论。由黎曼在1854年的论文（见第四章）所提出的非欧几何之一——双椭圆几何，与欧氏几何有根本的不同。没有平行线，任何两条直线相交于两点；三角形内角之和大于180°，许多定理也同欧氏几何中相应定理截然不同。贝尔特拉米在1868年指出，如果将双椭圆几何的直线看作球上的大圆，平面上的这一几何同样适用于球面。

这一解释似乎讲不通。所有非欧几何的发明者们认为他们所定义的直线同欧氏几何中定义的直线毫无二致。但是，我们可以回忆一下欧几里得关于直线及其他一些概念的定义是多余的（见第五章）。在任何一个数学分支中，总有未定义的概念，像亚里士多德强调的那样，只要这些直线满足公理即可。但球面上的大圆的确满足双椭圆几何的公理。当双椭圆几何的公理适用于球面上的大圆时，其定理也同样适用，因为定理总是逻辑的结果。

若认可了将直线作为大圆，那双椭圆几何的相容性可以如下建立：如果双椭圆几何中有矛盾的定理的话，那么在球面几何中也会出现矛盾的定理。而球面是欧氏几何的一部分，因此，如果欧氏几何是相容的，那么双椭圆几何也必然是相容的。

双曲几何的相容性就没有这么简单了（见第四章）。但是，既然双椭圆几何的相容性可以用球表面作为一个模型来建立，那双曲几何也可以由某个与欧氏几何相关的构型来建立。我们在这里不追究细节，但是，我们应注意到这一事实，即双曲几何的相容性也意味着欧氏几何中平行公理是独立于其他公理的。否则，即

它可以由其他公理推出，那它只能成为双曲几何的定理。因为，除了平行公理，双曲几何的其他公理，同欧氏几何中相应的公理是一模一样的。但是欧氏几何的这一“定理”将与双曲几何的平行公理矛盾，从而双曲几何是不相容的。因此，数年来由欧氏几何其他公理推导出平行公理的努力，注定是劳而无功。

有这样一个奇异的现象，即被看作是几何的非欧几何，它们的直线不具有通常的意义，可以适用于与人的想象截然不同的圆形，这一事实将导致举足轻重的结果。如同我们说过的那样，完全不同的解释是可能的，因为任何公理的发展中未定义的概念是必然存在的。这些解释被称作模型。这样，我们目睹了由于某种物理意义而发明的数学分支可以适用于截然不同的物理或数学的情形。

非欧几何的相容性建立在欧氏几何相容性的基础之上，对19世纪七、八十年代的数学家而言，欧氏几何的相容性是不容置疑的。除了高斯，罗里切夫斯基、鲍耶和黎曼，欧氏几何还被看作现实世界的必然几何，没有人相信其中会有矛盾，但是，其相容性并没有逻辑的证明。

对大多数轻蔑非欧几何的数学家来说，接受相容性证明有另外的原因。这些证明赋与非欧几何以意义，但只是将其作为欧氏几何意义上的模型。因此，人们是从这个意义上，而不是把它作为可应用于现实世界，其中直线具有通常意义的几何来接受的。当然，这与高斯，罗巴切夫斯基和黎曼的观点不同。

现在严密化工作只剩一个主要问题了。欧氏几何被发现是有缺陷的，但是与分析不同，几何的本质和概念是清晰的。因此，确定非定义的概念，将定义精确化，补充遗漏的公理，完成证明，相对而言较为轻松。这项工作分别由帕斯（Moritz Pasch），韦隆内（Giuseppe Veronese），和皮埃里（Mario Pieri）完成。希尔伯特借助于帕斯的研究成果，给出了目前最常使用的形式。几乎在同一时刻，由兰伯特、高斯、罗巴切夫斯基和鲍耶发明的非欧几何，以及19世纪所发明的其他几何，特别是投影几何的基础，都给出

了。

到1900年为止，算术、代数和（建立在整数公理基础上的）分析及（以点、线和其他几何概念为基础的）几何已经被严密化。许多数学家赞成进一步通过解析几何把所有几何建立在整数的基础之上，但几何尚有疑点。关于非欧几何的一个教训是，曾被视为严密之典范的欧氏几何实际上是有缺陷的，这一令人痛苦的记忆仍然萦绕在数学家们的心头。1900年以前，把全部几何归结为数这一工作并未真正开展起来。尽管如此，当时大多数的数学家总是说数学的算术化，虽然精确地来讲应是分析的算术化。这样，1900年在巴黎举行的第二届国际数学家大会上，彭加勒断言："今天分析领域中只剩下了整数，及整数的有穷和无穷系统，它们由相等或不相等的关系网连结着。"帕斯卡说过"所有超越了几何的都超越了我们的理解力"，1900年时，数学家们更愿意说："所有超越了算术的都超出了我们的理解力"。

最初目标有限的运动，在得到日益增多的拥护者的同时，遇见的问题常常会超出最初的计划，甚至会被这些问题淹没。关于数学基础的批评运动也纠缠于逻辑，即在由一个数学步骤推出另一个中的推理原理。

逻辑科学是由亚里士多德在他的《工具篇》中奠定的。他明确指出，他注意到了数学家们所使用的推理原理，把它们抽象出来，而且发现它们是适用于所有推理的理论。他的基本原理之一就是排中律，即所有有意义的断言非真即假。这可能是他从数学命题，如所有正整数非偶即奇中抽象出来的。亚里士多德的逻辑主要由三段论构成。

两千多年来，被数学家们占据了一席之地的知识界一直接受亚里士多德的逻辑。不错，对一切信仰及教条提出质疑的笛卡尔确实提出过我们总能知道逻辑原理是否正确这一问题。他的回答是，上帝不会欺骗我们。这样，他就为我们拥有这些原理的正确性找到了一个合理的辩护。

笛卡尔和莱布尼茨想把逻辑定律拓广为一个统一的推理的科

学、一个统一的推理的演算方法，适用于所有的思维领域。同时，他们还有这样的想法，即像代数那样用符号来严密和便利推理定律的使用。笛卡尔是这样提及数学方法的："比较起前人所馈赠给我们的知识工具来说，它作为所有其他方法的源泉是最有力的。"

莱布尼茨的普遍逻辑构想比笛卡尔的更为明确，它需三个基本元素。首先是普遍性——一种统一的科学的语言，其可以部分或大部分符号化，适用于由推理得出的所有真理。第二个元素是一个包揽无遗的推理逻辑形式的完备集合——推理演算——它允许由最初的原理进行任何可能的演算。第三个——技巧组合——所有基本概念的集合。在此形式之上可定义其他所有概念，它是一个思维的程序，对下面每一简单概念赋以一个符号，通过对这些符号的组合和运算允许更为复杂的概念的表达式和处理。

基本原理，比方说将是同一律，即 A 就是 A，而不是非 A，从这些原理，所有的理性真理，包括数学中的理性真理，都可推出。而且，还有事实真理的存在必须以他所谓的充分推理原理为条件，不可能有别的情况。莱布尼茨是符号逻辑的创始人，但他在这一领域的工作直到 1901 年才被认识到。

不管是笛卡尔，还是莱布尼茨，都没有发展推理的符号演算，他们只写下了一些零散的片断。这样，直到 19 世纪，亚里士多德的逻辑依旧盛行。在 1797 年的《纯粹理性批判》第二版中，康德称逻辑为"一个封闭的完整的学说体系"。虽然到 1900 年，大多数的数学家们仍继续用符合非正规的口头表述的亚里士多德的原理来进行推理，但他们也开始用一些其他并未被亚里士多德接受的原理。他们并未严格检验自己的逻辑原理，而是自认为他们使用的是合理的推理逻辑，实际上，他们使用的原理直觉上是合理的，但并不是准确的逻辑原理。

当大多数的科学家全神贯注于数学的严格化时，有一部分人开始探讨当时所使用的逻辑。下一个大的发展当归功于布尔(George Boole)，一位爱尔兰科克王后学院的数学教授。

布尔的工作无疑是受到皮科克、格雷戈里和笛·摩根（见第

七章）代数观点的启发。虽然他们的型的永恒性原理并不能真的证明代表实数、复数的文字系数的算术运算的正确性，但他们可能是无意识地采纳了这样一个新的代数观点，即符号和运算可用来表示任何事物，并且哈密尔顿在四元数上的工作（1843年）也的确表明，其他的代数也是可能的。布尔1848年在一篇文章中综述了他称之为算子演算的代数推理。注意到这样一种观点，即代数不只是处理数，且代数的定律也不一定是实数和复数的定律。在他的《逻辑的数学分析》（1847年）的开篇他讲到这一点，并提出了一门逻辑代数。他的主要著作是《思想规律的研究》（1854年）。布尔的主要观点没有莱布尼茨的野心勃勃，但更贴近于莱布尼茨的推理演算，即现存的推理规则可以由符号形式来表达，这样可以严密化并促进现存逻辑的应用。在他的书中，他这样叙述道：

> 下列论文的目的是为了研究思维运算的基本规则，推理正是依据这些规则而完成的。给出演算的符号语言表示式，并在此基础上建立逻辑科学和构造它的方法。

布尔也考虑了在思维中的特殊应用，例如，概率律。

符号化使科学家们受益无穷。在证明过程中，人们可能由于无意识地引入了并非自己所指的意义或使用了不正确的演绎原理而出现错误。即如，把光线作为光学现象讨论时，说到“看见光”或一物体的“光重”是令人迷惑的。但是，如果用l来表示物理光线，则所有关于l的进一步符号分析，都将指的是光学现象。而且，所有的证明就是符号集合用符号转换规则而不是用逻辑定理非正式形式转化成另一集合。这些规则用严密且易于应用的形式表示了正确原理。

为了正确评价布尔的逻辑代数，让我们先了解一些他的观点。假设用x、y表示事物的集合，例如，表示狗的集合和红色动物的集合。那么xy表示既属于x又属于y的事物的集合。在狗和红色动物这种情况下，它表示红色的狗的集合。对任何x、y而言，有$xy=yx$。若z代表白色物体，且$x=y$的话，则有$zx=zy$。从xy

的意义还可推出 $xx=x$。

符号化的 $x+y$ 表示在 x 中或在 y 中或既在 x 中又在 y 中的事物的集合（这在后来被杰文斯（William Stamley Jevons）做了修改）。这样若 x 代表男人的集合，y 代表选民的集合，那 $x+y$ 则是男人和选民的集合（这一集合也包括了女性选民）。因此可以证明，若 z 表示年龄超过 35 岁的人的集合，则有

$$z(x+y)=zx+zy$$

若 x 是一集合，则 $1-x$ 或 $-x$ 是所有不在 x 中事物的集合。这样，若 1 表示所有事物的集合，而 x 表示狗，$1-x$ 或 $-x$ 则表示非狗的事物，这样 $-(-x)$ 表示狗的集合。等式 $x+(1-x)=1$ 说明每一事物要么是狗，要么不是狗。这就是集合的排中律。布尔示范了如何在不同的领域运用这种纯代数操作来进行推理。

布尔也引入了所谓的命题逻辑，虽然这一逻辑的使用应当追溯到斯多伊克斯（Stoics）。在这种解释过程中，p 总是代表，如，“约翰是一个男人”且假定 p 是指“约翰是一个男人”为真。则 $1-p$（或者 $-p$）表示“约翰是一个男人”为假。同样，$-(-p)$ 表示约翰不是男人不为真，即，约翰是一个男人。命题的排中律，即任何命题非真即假，布尔将之表达为 $p+(-p)=1$，其中的 1 表示真。乘积 pq 表示命题 p、q 均真。同理 $p+q$ 表示或者 p 为真或者 q 为真或者 p、q 都真。

笛·摩根掀起了另一场变革。在他的主要著作《形式逻辑》（1847 年）中，笛·摩根引入了这样的观点，逻辑必须处理普遍意义上的关系。亚里士多德的逻辑处理的是动词“是”的关系。一个典型的例子是“所有的人都是要死的.”如笛·摩根所说，亚里士多德的逻辑不能证明由“一匹马是一个动物”到“一匹马的头是一个动物的头”的推理，这需要增加一个前提即所有的动物都有头。亚里士多德确实提及了逻辑的关系，尽管是含混不清且不广泛。而且，亚里士多德的许多著作以及中世纪学者们的补充在 17 世纪时已失散了。

显而易见，需要有关系的逻辑，这样，基于关系“是”的论

断，如：

A 是一个 p；

B 是一个 p；

因此，A 和 B 都是 p。

这显见是错误的，如以下的论断：

约翰是一个哥哥；

彼特是一个哥哥；

因此，约翰和彼特都是哥哥（相互间），显然这是错误的，类似地：

苹果是酸的；

酸是一种味道；

因此，苹果是一种味道。

也是一个不正确的结论。没有发展关系逻辑是亚里士多德逻辑的主要缺陷，这一缺陷莱布尼茨也注意到了。

关系通常不能翻译成主词＋谓词，其中谓词仅仅表明主词包含于由谓词所说明的集合中。因此，必须考虑表示关系的命题，例如：2 比 3 小或点 O 在点 P 和点 R 之间。也必须考虑它们的否、逆、联合等其他联系的命题。

关系逻辑由皮尔斯（Charles Sanders Peirce）在他从 1870 到 1893 年的几篇论文中得以发展，并被施罗德（Ernst Schröder）系统化。皮尔斯引入了特殊的符号概指表示关系的命题。这样，l_{ij}就表示“i 爱 j”，实际上，他的关系代数是很复杂的，并不实用。以后我们将看到在现代符号逻辑中如何处理关系。

逻辑科学的另一扩展（布尔曾涉猎过），由皮尔斯有效地引进。他强调了命题函数这一概念。就像数学处理的函数，如 $y=2x$，而不是关于常数的命题，如 $10=2\times5$。“约翰是一个男人”是一个命题，而“x 是一个男人”则是一个命题函数，其中 x 是一个变量。命题函数可以包括两个或更多个变量，如在“x 爱 y”中。由于皮尔斯的功绩，推理得以延伸到命题函数中。

皮尔斯还引入了所谓的“量词”。普通语言相对于量词来说，

是很模糊的，如以下两句：

一个美国人领导了独立战争。

一个美国人信仰民主。

用“一个美国人”这一词语表示两种不同的意思。第一句指的是一个特殊的美国人：乔治·华盛顿；而第二句指的是每一个美国人。通常这一含混可以由短语使用的上下文来判别，但这种含混不清对于严密的逻辑思维来说却是不可接受的。论断本身必须是明确的，解决的办法就是使用量词。我们可能希望能断言一个命题函数对某个集合中的所有元素都为真，例如：每一个美国人。如果对所有的 x，x 是一个男人，那么就能断言美国的所有人都是男人，“对所有的 x”即是一个量词。另一方面我们希望说至少有一个 x，使得 x 是在美国的男人。在这种情况下，“至少存在一个 x 使得”是量词。这两种量词分别由符号 $\forall x$、$\exists x$ 来表示。

逻辑在关系、命题函数、量词上的扩充包含了在数学上使用的推理种类，使得逻辑更加丰富。

弗雷格（Gottlob Frege）是耶拿（德国一城市）的一位数学教授，在数学化逻辑的方向上，他迈出了19世纪的最关键一步。弗雷格写了几本重要著作，《概念演算》（1879年）、《算术基础》（1884年）和《算术的基本法则》（第一卷：1893年；第二卷：1903年）。他继承了命题逻辑、涉及关系的命题、命题函数和量词等观念，他自己也做出了一些贡献。他引入了一个命题的叙述和判定它是真的这二者之间的区别。用符号 $\vdash$ 放在命题的前面表示肯定。他区分了元素 x 和仅含 x 的集合 $\{x\}$，还区分了元素属于集合和集合蕴涵于另一集合。

弗雷格还将一个更广泛的蕴涵概念，称为实质蕴含形式化，它的字面形式上的表达将追溯到墨伽拉的菲罗（Philo of Megara）。逻辑处理关于命题和命题函数的推理，这一过程中蕴涵是最重要的。如，我们知道约翰是一个聪明的人，而聪明的人长寿，那么可以推导出这样的蕴涵：约翰将长寿。

实质蕴涵与通常使用的蕴涵有所不同。当我们假定，如，“如

果下雨，我将去看电影”，两个命题间不仅有一定的关系，而且是蕴涵关系。即若前提“天下雨”成立，则结论”我去看电影”必然成立。而实质蕴涵的概念允许 p 和 q，即前提和结论，可以为任何命题。命题之间不必存在因果关系或其他任何联系。可以这样说“如果 x 是一个偶数，我就去看电影。”而且，实质蕴涵允许甚至当 x 是一个偶数为假时，结果也成立。即“若 x 不是偶数时，我将去看电影。”更进一步，它允许蕴涵“若 x 不是偶数时，我将不去看电影”。这个蕴涵仅当 x 为偶数而我没有去看电影时为假。

从形式上来说，若 p 和 q 均是命题，若 p 为真，蕴涵“p 蕴涵 q”当然意味着 q 为真。但是，实质蕴涵允许，甚至 p 为假时，无论 q 真假与否，蕴涵“p 蕴涵 q”都是真的。只有当 p 为真而 q 为假时，这一蕴涵为假。这一蕴涵观点是通常意义的延伸。不过这一延伸并不造成任何危害，因为我们只有当知道 p 为真时，才用“p 蕴涵 q”，而且，实质蕴含同日常用法有某些相通之处。考虑这一论断：“若哈罗德今天发工资，他将购买食品”。这里，p 是哈罗德今天发工资，q 是他购买食品。现在他可能仍在购买食品，即使他今天没发工资。因此，我们把 p 为假 q 为真的情况纳入合理蕴涵，当然，这一结论不为假。相似地有，“若哈罗德今天没发工资，他将不购买食品”也不是假命题。作为另一个，最后一种情况的更好例子，莫若“若木头是金属，则木头是可锻造的。”我们知道两个命题都是假的，而蕴涵是真的。因此，我们把 p 为假而 q 为假的这种情况也包含在作为 p 蕴涵 q 的正确情况。概念的重要应用是能从 p 的真实性以及 p 蕴涵 q 的蕴涵中判断 q，当 p 为假时的扩展在符号逻辑中是方便的，且最有效的。

但是，由于无论 q 为真或假、p 为假都蕴涵 q，实质蕴涵也就允许一个错误的命题蕴涵任何命题。对于这一“缺陷”，有人会反驳说，在一个正确的逻辑系统和数学中，假命题是不应当出现的。不管怎么说，对实质蕴涵的概念一直存在反对意见。例如，彭加勒用这样的事例嘲笑它，说有些学生在考试中用错误命题得出了正确命题。但是，尽管在这一概念上还需做更大的努力，实质蕴

涵现在成了一种规则，至少在符号逻辑中是作为数学基础使用的。

弗雷格做出的另一更大贡献，在以后被证实是举足轻重的。逻辑包括许多推理原理，好像欧氏几何关于三角形、矩形、圆和其他图形的论断一样。由于19世纪末其他数学分支的重新组织，几何中的许多论断可以由极少的基本论断——公理导出。弗雷格为逻辑精细地做了这一工作。他的符号和公理是复杂的，我们仅仅从字面上指出逻辑的公理发展的方法（见第十章）。作为一个公理来采用论断“p 蕴涵 p 或 q”无疑是稳妥的，因为 p 或 q 的意义是，p 或者 q 中至少一个是真的。若我们一开始便假定 p 为真，则 p 和 q 中的一个肯定为真。

我们也可以把下述作为公理：若由 A 表示的某命题（或命题组合）为真且 A 蕴涵 B，B 为另一命题（或命题组合），则我们可以单独地判断 B。这一公理，称为推理规则，使我们能推导或判定新的命题。

由上面的公理我们可推导出，例如：

p 为真或者 p 为假

这一推导组成了排中律。

还可以推导出矛盾律，其字面形式是 p 和非 p 不能同时为真，两种可能只能有一种成立。矛盾律应用于数学中所谓的间接证明中。若我们假定 p 为真，又推导出它为假，我们得到了 p 和非 p，但两者不能同时成立，因此 p 一定为假。这种间接方法经常采用另一种形式，我们假设 p 为真，且它蕴涵 q，但 q 已知为假，因此，由逻辑定律，p 一定为假。许多其他常用的逻辑定律都可由公理演绎而来。这种逻辑的演绎结构始于弗雷格的《概念演算》，在他的《基本法则》中得以发展。

弗雷格还有一个更宏大的目标，在以后的章节中我们将细述（见第十章）。这里简单提一句，他在他的逻辑工作中试图为数和代数分析构造出一个新的基础，这一基础比19世纪最后几十年中的批评运动还要严格得多。

另一个用符号逻辑来改进数学的严密性的关键人物是皮亚

诺。像戴德金一样，他在数学中发现现存的严格性不完善，因而献身于改进逻辑基础。他不仅将符号逻辑用于逻辑原理，而且用于数学公理的表示式，并且用符号逻辑原理操作符号公理进行定理的推导。他明确而坚定地认为，我们应当放弃直觉，而这只有用操作符号运算才能做到，符号避免了普通词语间直觉联系带来的危险。

皮亚诺将量词、连词例如"和"、"或"、"非"引入了自己的符号系统。他的符号逻辑只具雏形，但影响甚大。他所编辑的杂志《数学评论》（创建于1891年，于1906年出刊）和所著的五卷《数学公式》（1894—1908年）是他主要的贡献。在《公式》中他给出了以前所提及的整数的公理。皮亚诺创建了逻辑学家的学派，而皮尔斯和弗雷格的工作在罗素1901年发现弗雷格的贡献之前一直鲜为人知。罗素于1900年获晓了皮亚诺的工作，比起弗雷格的，他更欣赏皮亚诺的工作。

从布尔、施罗德到皮尔斯、弗雷格，逻辑中的变革组成了数学方法的应用：符号系统和从逻辑公理中得到逻辑原理的推导证明。所有的这些关于形式逻辑或符号逻辑中的工作吸引了逻辑学家和数学家，因为符号的使用避免了心理上、认识上、形而上学的意义和暗示。

包括命题函数关系，如"x 爱 y"或"A 在 B、C 之间"，以及量词的逻辑的系统现在一般称为一阶谓词演算或一阶逻辑。虽然对某些逻辑学家而言，它并不能覆盖数学中所有用到的推理，例如数学归纳法，它是现代数学家颇为青睐的系统。*

鉴于以后我们将涉及数学的逻辑结构，在这里让我们强调一点，数学和逻辑的严格化是首先由欧几里得通过公理途径达到的。

---

* 为了囊括数学中所有用到的推理，一些逻辑学家们提出了所谓的二阶逻辑，这要求将量词用于谓词。这样，若表示 $x=y$，我们希望断言所有适用于 x 的谓词都适于 y，通过包含"对所有宾语而言"这样的语句或用符号 $x=y\leftrightarrow(F)(F(x)\leftrightarrow F(y))$ 来量化谓词。——原注

这一方法的一些特色在19世纪的公理化运动中愈来愈清晰，让我们回顾一下它们。

首先是定义概念的必要性。因为数学独立于其他学科，所以定义也必须用其他的数学概念来说明。如此，这一过程将导致定义的无限循环。解决这一问题的方法是基本概念必须是不加定义的。那么怎么用它们呢？又怎么知道对于他们可以断言哪些事实呢？答案在于公理确定了未定义（已定义）概念，告诉我们什么可以判定。这样，如果点和线未定义，则两点确定一条直线的公理和三点确定一个平面的公理，可以用来推导关于点、线、面更进一步的结论。尽管亚里士多德在他的《工具论》、帕斯卡在他的《几何精神论》中，以及莱布尼茨在《单子论》中都强调了未定义概念的必要性，但数学家们还是忽视了这一事实，结果给出了许多毫无意义的定义。格高尼（Goseph-Diaz Gergonne）早在19世纪初即指出公理将告诉我们对未定义的概念可以做出什么样的结论；它们给出了所谓的隐含定义。直到1882年帕斯再一次强调未定义概念的必要性，数学家们才开始严肃地考虑这一问题。

任何演绎系统一定包括未定义概念，其能翻译成满足公理的含义，这一事实给数学家们引入了一个新层次的抽象。这一点早被格拉斯曼在他的《线性扩张论》（1844年）中提出。他指出几何当不同于物理空间的研究，几何是一个纯数学结构，可以运用于物理空间，但不拘于这一解释。后来，公理的研究者们：帕斯、皮亚诺和希尔伯特，强调了这种抽象性。虽然帕斯明白存在未定义概念且只有公理限制它们的意义，但他只在头脑中构造几何。皮亚诺洞悉帕斯的研究，在他1889年的文章中更清楚地认识到许多其他的解释也是可能的。希尔伯特在《几何基础》（1899年）中指出，虽然用的概念是点、线、面等，但如果它们遵从所涉及的公理的话，可以是啤酒杯、椅子或任何物体。演绎系统多种解释的可能性实际上是非常有益的，因为它允许更多的应用，但我们将发现（见第十二章）它也引起一些令人困扰的结果。

帕斯通晓现代公理体系，他提出的观点的意义在19世纪末显

然并未被接受，即必须建立公理集合的相容性，也就是说，它们不会导致矛盾的定理。非欧几何中相容性问题曾出现，但已被满意地解决了。但是，非欧几何仍令人感到奇怪。对一些基本的分支，像整数理论或欧氏几何，任何关于相容性的疑问看上去是不切实际的。不管怎么说，帕斯认为这些公理系统的相容性应该建立起来，弗雷格附和他这一观点，他曾在《算术基础》(1884 年)中写道：

> 把一个单纯的假设当作自己的结果来着手处理问题是很普遍的，我们假设在任何情况下，执行减法、除法、开方的运算都是可能的，而且认为我们已经做了足够多的这种运算。但是为什么我们不假定任何三点可以画出一条直线？为什么我们不假设所有的加法、乘法定律在三维复数系统中会像在实数中一样成立？因为这些假设包含着矛盾。如这样我们首先要做的是证明我们的其他假设不包含任何矛盾，直到我们做了这一切，像我们希望的，严格才不会是空想。

皮亚诺和他的学派也在 19 世纪 90 年代开始比较严肃地对待相容性问题。皮亚诺相信建立相容性将很容易。

数学的相容性很可能在希腊时代就被怀疑，为什么到 19 世纪末它才得以显露？我们已经注意到，非欧几何的创立迫使人们意识到，数学是人为的，只是对现实世界的近似描述，这种描述是相当成功的，但从反映宇宙的固有结构而言，它并不是真理，因而不必是相容的。实际上，19 世纪末的公理化运动使数学家们认识到数学和现实世界间有一条壕沟，每个公理体系都包含未定义概念，其属性在这些公理意义上是明确的。但这些概念的意义并不固定，虽然我们头脑中直觉地具有数、点及线的概念。值得肯定的是，公理是用来确定属性，从而使这些概念确实具有我们本能地与之联系在一起的属性。但是我们确实做到了这一点吗？我们能确保没引入一些想要的属性或蕴涵，而导致了矛盾吗？

公理化方法的另一个特点也是由帕斯指出的。数学任一分支的公理最好是独立的，即这一分支中的任一公理不应当由其他公理推出来。如果这样的话，被推导出的公理只能是一个定理。确定一个公理的独立性的方法是给出其他公理的一个解释或模式，其中这些公理都满足，而欲加讨论的那个不满足（这一解释不必与欲加讨论的公理的否定相容）。例如，欲由欧氏几何的其他公理建立平行公理的独立性时，可以用双曲非欧几何来解释，在这种几何中除平行公理外，所有欧氏几何的其他公理都满足，一个既能满足所论公理又能满足与其相矛盾的公理的解释是不相容的。因此当用一个解释或模式来证明一个公理的独立性时，首先必须知道这一模式是否相容。这样，像我们以前提到的，欧氏几何平行公理的独立性是由在欧氏几何中建立一双曲非欧几何模式而确立的。

虽然我们后面的大多数时间是关注着数学公理化引起的疑问，不涉及重大的问题，但在20世纪初公理化方法被认为是完美的。没有人比希尔伯特对它更为推崇了，他是那时世界上顶尖的数学家。在他的文章中关于"公理化思维"(1918年出版)，他宣称：

> 任何可以成为数学思维对象的东西，其理论的建立一旦成熟，它就会成为公理化的方法，并由此直接进入数学。通过探寻公理的每一更深的层次……我们可以洞悉科学思想的精髓，获得我们知识的统一，特别是借助公理化方法，数学应该在所有认识中起到主导作用。

在1922年他又断言：

> 公理化方法，确实是，而且始终是不论在哪个领域中探求事实精髓的合适的、不可缺少的工具。其逻辑性是无懈可击的，同时也是成熟的，因此也保证了分析的完全自由。进行公理化意味着除了有关问题外，不需考虑其他知识。起先没有公理化方法时，人只是幼稚地思考，把一些特定的关系当作教

条，公理化方法消除了这种幼稚性。

人们一般认为数学家们都会赞成在一个坚实，严格的基础上建立自己的科学，但是数学家们也是人，一些基本概念如无理数、连续性、积分、导数的精确定义未被所有的数学家们乐于接受。许多人并不理解新的技术语言，而把这些精确的定义看作是无稽之谈。他们认为对数学的理解，甚至对严格的证明都是没有必要的。这些人觉得直觉已经够好的了，尽管对于没有导数的连续函数和其他逻辑上正确但非直觉的创造倍感惊讶。皮卡在1904年这样提及偏微分方程中的严格："真正的严格是富有成效的，与那种纯形式和繁杂的严密截然不同，那种严密工作给它所触及的问题投上了阴影。"埃尔密特在1893年5月20日给斯蒂杰斯的一封信中写道："我简直惊恐万状，不愿意面对这一不幸的现实，没有导数的连续函数！"彭加勒在他的数学哲学（将在以后的章节中研究）中也抱怨道："在以前，新的函数引进时，目的是为了应用它们。今天却恰恰相反，构造函数是为了证明前人的错误，而本身毫无半点用处。"

有许多人坚持说他们的定义和证明正是严格化所产生的结果，即使如鲍莱尔这样的大师也如此捍卫自己，其他的人则反对这种吹毛求疵。哈代1934年在一篇文章中称严密化是例行公事。还有一些人仍旧不理解严密化，因而防御性地贬损它，有一些人称之为数学中的混乱，对于新的观点，即在当时的情况下有助于数学的严密化的观点，数学家和其他的人同样不乐于接受。

严密化工作揭示了数学创造的另一面。严密化满足了19世纪的需要，而最后的结果也告诉了我们关于数学发展的一些事实。新建立的严密结构也许保证了数学的正确性，但这一保证几乎毫无必要。算术、代数、欧氏几何中没有一个定理因此而改变，而分析的定理只是比以前要更仔细地表述了。于是，想用一个连续函数的导数时必须假设其是可导的。事实上，所有的这些新的公理化结构和严密所做的无非是证明了数学家所知道的那些东西确实是那样的。确实，这些公理只能产生现存的这些定理而非其他。因

为这些理论整体来说是正确的。所有的这些意味着数学并非建立在逻辑之上而是建立在健全的直觉之上。严密化正像阿达马指出的那样，仅仅是对直觉承认的东西加以确认，或者如魏尔所说，逻辑是数学家们想要保证思想健康和强壮的卫生手段。

不管怎样，到1900年严密化已经再次强调了它的地位，而且，即使是晚了几个世纪，也终于获得了确认。数学家们可以宣称他们根据希腊人所设定的标准完成了自己的使命。他们可以比较放心地依赖这些知识了，因为除了一些细枝末节的修改之外，他们在经验或直觉上建立起来的绝大多数已被逻辑所证实。事实上，数学家们如此欢欣鼓舞，竟至有些得意忘形了。他们回顾几次危机：无理数、微积分、非欧几何和四元数，他们为自己克服了这些创造带来的灾难而喝彩不已。

在1900年巴黎举行的第二届国际数学大会上，彭加勒，希尔伯特领袖地位的主要竞争者，作了一重要讲话。尽管他怀疑一些数学中引入的过分精炼的价值，但仍夸耀道：

> 我们最终达到了绝对的严密吗？在数学发展前进的每一阶段，我们的前人都坚信他们达到了这一点，如果他被蒙蔽了，我们是不是也像他们一样被蒙敝了？……但今天在分析中，如果我们不厌其烦地严格的话，就会发现只有三段论或归结于纯数的直觉是不可能欺骗我们的。今天我们可以宣称绝对的严密已经实现了！

彭加勒在他的著作《科学的价值》(1905年)所收集的一篇论文中又重复了他的大话。当我们观察到这些科学家在使他们这门学科的许多分支严密化时所表现出来的热情时，不难找到如此飘飘然的原因，除极少数愚者，数学现在的基础已被所有数学家所接受，因此他们完全可以欢呼雀跃了。

在伏尔泰的讽刺剧《公正》中，哲学家潘格洛斯博士甚至在被绞死之前，还这样说道："在所有可能的世界中，这是最好的。"恰如有些数学家，不知道他们马上要被自己竖起的绞刑架吊死，还

在说他们已进入了最美好的境地。实际上，暴风雨正在酝酿，如果参加1900年国际数学家大会的数学家们抬头看看窗外，他们也许就会警觉，但是他们却都沉溺于庆祝的杯光酒影之中了。

但是，还是有这么一个人，同样在1900年大会上清醒地认识到数学基础中的漏洞并未完全堵住。在这次会议上，希尔伯特列出了他认为是数学发展中最重要的23个问题。第一个问题包括两部分，康托尔引入了超限数来表示无限集中元素的个数，关于这一创举，希尔伯特提出的问题是，证明整数个数这一超限数之后，第二大超限数是所有实数的个数。在第九章中我们将论及这一问题。

第一个问题的第二个部分是要求一种重排实数的方法，使得这样重新排序后的集合是所谓的良序集。虽然在以后我们将论及这一问题，但现在只要这样说就行了，即：实数集的良序化要求从良序化后的实数集中选出的任一子集都有最小元。在实数的通常排列中，若选择比5大的所有实数做为一个子集，那么这一子集将没有最小元。

希尔伯特的第二个问题则更为明显并有更大的影响。我们已经注意到，相容性问题的产生同非欧几何有关，而且也给出了在假设欧氏几何相容的情况下的证明。希尔伯特通过解析几何这一媒介，指出如果算术科学是相容的，则欧氏几何是相容的。因此，在他第二个问题中他要求有算术科学是相容的证明。

康托尔的确注意到了希尔伯特第一问题的两个部分，而且帕斯、皮亚诺和弗雷格也注意到了相容性的问题，但是只有希尔伯特在1900年认为这些问题是十分重大、而不是暂时的。毫无疑问，大多数的科学家听到希尔伯特在1900年第二届国际数学大会上的发言后，都认为这些问题无足轻重，纯属异想天开。他们转而被希尔伯特所提出的其他问题所吸引，因为对算术的相容性，人们深信不疑。许多关于非欧几何相容性的疑问——它是奇特的，甚至与直觉截然相反——是合情合理的。但是实数系统已经用了五千多年，无数关于实数的理论均被证明，仍未发现任何矛盾。实

数公理产生了许多著名定理，这样的公理体系怎么会是不相容的呢？

任何关于希尔伯特明智地提出上述问题，并且把它放在23个问题之首的疑问很快消散了。屋外云涛翻涌、山雨欲来，有些数学家开始听到了雷声，但甚至是希尔伯特也没能预见到等待他们的将是怎样一场风暴！

第九章　天堂受阻：理性的新危机

数学中不存在真正的论战。

——高斯

逻辑是使人走向错误的艺术。

——无名氏

经历了几个世纪在理性迷雾中的摸索，到1900年，数学家们似乎已经赋予了他们的学科一种理想的结构，也就是欧几里得在他的《原本》中所描述的那种。他们最终承认了未定义概念的必需，一些含混或令人不愉快的定义被取消，一些分支也被建立在严格公理的基础上。正确、严谨、演绎的证明取代了基于直觉或经验的结论，甚至逻辑学的原理也被发展用以完善数学家们过去常用的那种不正规的，不清晰的证明方式。就我们所知，到1900年时，它们的应用是可靠的。至此，正如我们已经说过的那样，数学家们因此倍感欣喜。正当他们额手称庆之时，新的发展却搅乱了他们的平静生活，这甚至超出了19世纪前半叶时非欧几何和四

元数所造成的影响。正如弗雷格所言："当大厦即将竣工的时候，基础却崩溃了。"

希尔伯特曾经呼吁数学界注意一些尚未解决的关系到数学基础的问题（见第八章），这其中，建立不同公理系统的相容性问题是最基本的。他也意识到公理化方法使得未定义概念及其有关公理的运用成为必需，凭直觉，这样的概念及公理有着很特殊的意义。例如，点、线、面这些词语，都有实在对应物，而欧氏几何的公理，正是表述这些概念间的物理事实的。然而，正像希尔伯特所强调的、纯粹的欧氏几何逻辑并不要求点、线、面被束缚于某种特定的解释，而且对这样的公理，应该用尽可能少的假定，而致力于推导出更多的东西。尽管有人试图把公理公式化，以使他们能断言哪些东西看起来有实在意义，但在公式化的同时，也存在着危险，即这些公理可能成为不相容的，也就是说会导致矛盾。帕斯、皮亚诺和弗雷格已经意识到了这种危险，希尔伯特在1900年的巴黎数学家大会上也强调了这个问题。

把物理事实抽象公式化时，可能出的毛病用一个粗浅的比喻也许更容易明白。发生了一起罪案（许多人会同意数学是一种罪过），一个侦探在调查案件时，有一些未定义概念，如罪犯、犯罪时间等。无论得到什么事实，他都记录下来，这就是他的公理，然后他对事实进行推理，以期对案子能做出一些判断。他很可能做出矛盾的推论，因为他所做的一些假设，尽管尽可能的基于已发生的事情，却仍然可能超出事实或只是接近事实，虽然在实际情况中并不存在矛盾。的确存在犯罪和罪犯，但推理会得出这样的结论，罪犯身高五英尺，同时，他身高六英尺。

如果不是为了新的发展，那么，各公理系统相容性的证明能否成为关键性问题，还是值得怀疑。到1900年，数学家们认识到他们不能再依赖于数学的物理真实性来肯定它的相容性。以前，当欧氏几何被当作物理空间的几何时，其中定理的连续推导会导致矛盾是不可思议的事情。但是到1900年，欧氏几何被看成不过是建立在一组二十条左右人为公理上的逻辑构造，彼此矛盾的定理

出现是确实可能的。那样的话，许多以前的工作会变得毫无意义，这是因为，如果两个彼此矛盾的理论出现的话，每一个都可以用来证明另一个的矛盾之处，因此，推导出来的定理会毫无用处。但希尔伯特通过证明，只要算术系统的逻辑构造是相容的，则欧氏几何也是相容的，排除了这种可怕的"如果"，也就是说，实数系统必然是相容的，对此几乎不存在什么忧虑和危机。

但是，令所有人惊愕不已的是，刚过1900年，就在构成并延伸我们关于数的知识的基础理论中发现了矛盾。因而到1904年普林斯海姆（Alfred Pringsheim），一位杰出的数学家说，数学所寻找的真实就是相容性。当希尔伯特在1918年的一篇文章中再次强调这个问题的时候，他已有了比1900年讲话时更充足的理由。

在旧体系中导致矛盾并让人们大开眼界的新理论是关于无穷集合的。分析的严密化使人们必须考虑，收敛的无穷级数（有一个有限和）和那些发散级数的区别。在这些级数中，三角函数的无穷级数，即以傅立叶命名的傅立叶级数，起了极其重要的作用。而一些在严密化过程中产生的问题，在康托尔着手解答时暴露了出来。这导致他考虑数集的理论，特别是引入无穷集，像所有奇数，所有有理数和所有实数的集合的计数。

当康托尔把无穷集看成一个可以被人的心智思考的整体时，他就打破了长久以来的定论。从亚里士多德起，数学家们就能区分实无穷与潜无穷。比如说，地球的年龄，如果有人认为它是在某个确定时间创生的，它的年龄就是潜无穷。因为无论什么时候，它虽然有限，却在持续增长。所有（正）整数的集合也可以被看成是潜无限的。因为，即使一个人数到了一百万，他还可以考虑再加一、加二，等等。然而，如果地球在过去是一直存在的话，则任何时刻其年龄都是实无穷的。同样，所有整数的集合被当作一个整体时是实无穷的。

将无穷集看成是实无穷、还是潜无穷，这个问题由来已久。亚里士多德在他的《物理学》中得出的结论是："可选择的是无限具有潜性的存在……不会存在实无限。"他坚持认为数学中不需要后

者。希腊人通常认为无穷是不能接受的概念，它是一个不着边际且不确定的东西。后来，这些讨论曾一度使人迷惑不解，因为许多数学家像谈论数一样谈论无穷，却并没有弄清它的概念或确定它的性质。比如，欧拉在他的《代数学》（1770 年）中说 1/0 是无穷大（而他并没有定义无穷，只是用符号表示它），并且说：毫无疑问 2/0 是 1/0 的二倍。在有极限的场合运用∞符号产生了更多的混乱，当 n 趋于∞时，$\frac{1}{n}$趋于零。在这里符号∞仅意味着 n 可以取越来越大的值，并大到一定值（是有限的），以使 0 和$\frac{1}{n}$的差小于一任意值。这儿并没有涉及到实无穷。

然而，多数数学家，像伽利略、莱布尼茨、柯西、高斯和其他一些人都清楚地知道潜无穷集和一个实无穷集的区别，却拒绝考虑后者。如果他们必须得谈及，比如说，所有有理数的集合，他们不会赋一个数给这个集合，笛卡尔说过："无穷可以被认知，但不能被理解。"高斯在 1831 年写给舒马赫的信中说："我反对把无穷量作为现实的实体来用，在数学中这是永远不能允许的，无限只不过是一种说话方式，我们所说的极限是指，某些比可以随意地接近它，而其他的则被允许无界地增加。"

因此，当康托尔引入实无穷集时，他不得不完善他的创造，以与过去最伟大的数学家们所持有的概念相抗衡。他论证说，潜无穷实际上依赖于一个逻辑上优先的实无穷。他还证明：无理数，比如说$\sqrt{2}$，当用小数来表示时，要涉及到实无穷集，因为任何小数只能是一个近似。他意识到，他正在和他的前辈们彻底决裂。1883 年他说："我使自己同普遍的关于数学中无穷的观点和经常被保护的关于数的本质的观点处于敌对位置。"

到了 1873 年，他不仅主张把无穷集合看成一个存在的全体，还开始对它们加以分类。他根据两个无穷集包含着相同或相异的元素数来决定其区别，他的基本想法是利用一一对应。正如我们认为，5 本书和 5 个弹子都可以用同样的数 5 来代替，是因为我们可以把每一本书与每一颗弹子来配对。康托尔也将一一对应运用

于无穷集合。现在，可以建立起下面的所有正整数与偶数间的一一对应关系：

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots \end{array}$$

也就是说，每一个正整数恰好同一个偶数即它的两倍数相对应，且每个偶数恰好同一个正整数即它的一半相对应。康托尔因此得出结论，这两个集合包含同样多的元素个数。它是这样的一个对应，即全体正整数的集合，可以与其自身的一部分一一对应；这结论对早期的思想家来说，很是荒谬，也促使他们抵制有关无穷集的任何成果。但康托尔并没有因此而退缩，他预见到，无穷集合将遵循新的不适于有限集的法则，就好比四元数所遵循的新规则是实数所不具有的。事实上，他将无穷集定义为这样的集，其与自身的一个子集可以一一对应。

其实，康托尔也对自己用一一对应导致的结果惊愕不已。他证明了一条直线上的点和一个平面上的点（甚至是 n 维空间）之间存在着一一对应。他在 1877 年给戴德金的一封信中写道："我看到了它，却不敢相信它。"然而，他还是相信了，而且在确立无穷集合的相等时坚持了他的一一对应原理。

康托尔还定义了无穷集合大小的含义。如果集合 A 同集合 B 的一部分或子集能建立起一一对应，但集合 B 不能同 A 或其子集建立起一一对应关系，则集合 B 大于集合 A。这个定义仅是为了无穷集合才发展的，对有限集合则显而易见。比如说有 5 个弹子和 7 本书，你可以建立起弹子同一部分书的一一对应，但所有的书不能同全体或一部分弹子建立起这种关系。利用他的这种关于集合等或不等的定义，康托尔得出了惊人的结论，即正整数等价于有理数（所有正、负整数和分数）集，却小于实数（有理数和无理数）集。

正如采用数字符号 5、7、10 等来标识一个有限集中的元素数很方便一样，康托尔也决定采用符号来标识无穷集合中的元素数。整数集及可以同它建立起一一对应关系的集合含有同样多的元素

数，他用符号$\aleph_0$（阿列夫零）来表示这个基数。全体实数的集被证明大于整数集，他就用了一个新符号c来表示其基数。

进一步，康托尔能够证明，对于一个任意给定的集合，总存在一个比它更大的集合。例如，由一个给定集合的所有子集组成的集合大于原集合。我们不追究这个定理的证明，但只要设想一个有限集，就能够看出这个定理是合理的。比如，如果有一个含4个元素的集合，可以构造出4个含有1个元素的不同集合，6个含有2个元素的不同集合，4个含有3个元素的不同集合和一个含有4个元素的集合。要是再加上空集，我们会发现所有子集的数目正好是2^4，当然它是大于4的。特别的是，通过考虑整数集的所有可能的子集，康托尔证明了$2^{\aleph_0}=c$，这里c是实数集的基数。

19世纪70年代，康托尔研究无穷集合时，这个理论，曾被当作是无足轻重的，他所证明的关于三角级数的定理也非基本性的。可是到1900年时，他的集合理论已在其他数学领域中大量使用，而且，他和戴德金已经预见到，在建立整数（有限和超限的）理论，在分析曲线和维数的概念上，集合论都是有用武之地的，甚至可以成为整个数学的基础。其他一些数学家，如鲍莱尔和勒贝格在将积分一般化时，也有求于康托尔的无穷集合理论。

因此，康托尔本人发现了困难就不是微不足道的事情了。他已指出了存在着越来越大的超限集和与之相应的超限数。1895年，康托尔开始研究由所有集合组成的集合，它的基数应该是能存在的最大数了。然而，康托尔已经证明过一已知集合的所有子集构成的集合，其基数大于这已知集合的基数，因此，存在着一个比最大的数还要大的超限数。康托尔认定人们同时必须要区分开他所称为相容的和不相容的集合，并在1899年就此写信给戴德金，意思是不能谈论由所有集合组成的集合及其基数。

当罗素第一次看到康托尔关于所有集合的集合的结论时，他并不相信。他在1901年的一篇随笔中写道，“康托尔一定犯了某个微妙的小错误，我会在将来的某些工作中对此加以阐明。”他还

补充说，一定存在着一个最大的超限集合，因为如果什么都考虑进去了，那么就没有什么可以增加的了。罗素致力于这件事，并给这个当时时髦的问题又加上了他的“悖论”。对此，我们将马上予以讨论。16年后，当罗素重印他的随笔《神秘主义与逻辑》时，他增加了一条注脚对他的错误表示歉意。

除了我们已经谈及的超限数——称之为超限基数，康托尔还引入了超限序数，二者的区别相当微妙。设想一个集，比如说，由便士组成的集，其数目通常是最重要的，而怎样组成则无所谓。但如果按学生们在一次考试中的成绩把他们分等，就会有第一、第二、第三等等。比如说有十个学生，他们的分数就构成了从第一到第十的集合，且这是由有序数组成的集合。尽管一些早期文明能够区别序数与基数，他们仍采用同样的符号来表征由十个对象组成的有序集，就像对无序集所做的那样。这种做法被包括我们自己在内的后续文明所继承。因此，在十个人中的每一个被确定后，这样排列起来的人数是十个，因而无论是有序集还是无序集都用10来表示。然而，对于无限集合而言，有序与无序的区别是十分重要的，因而采用了不同的符号来表示。比如对于有序自然数集1，2，3，……，康托尔用ω来表示其序数。相应的，有序集1，2，3，……，1，2，3的序数表示为$\omega+3$。康托尔还引入了超限序数的分层，其可以扩展至$\omega\cdot\omega$、ω^{n}、ω^{ω}乃至更高。

在创立了超限序数的理论之后，1895年，康托尔意识到关于这些序数也存在着一个难题。同年他把这告知了希尔伯特，1897年，布拉利-福蒂（Cesare Burali-Forti）首先公开了这一难题。康托尔确信序数的集合可以按某种合适的方式加以排列，正如熟知的实数可以按大小排序一样。一个关于超限序数的定理是这样的，由不超过α的所有序数组成的集合，其序数大于α。如序数集1，2，3……ω的序数是$\omega+1$。因此，由所有序数组成的集合有一个比该集合中最大的序数还要大的序数。实际上，布拉利-福蒂指出，从1加到最大的序数就可以得到一个更大的序数。但这构成了矛盾，因为原集合已包含了所有的序数。布拉利-福蒂得出结论，序数集

的部分有序是可能的。

要是仅面对着上述两个问题，大多数数学家们毫无疑问会满足于住在19世纪末数学的严格性所创造的乐园里。关于是否存在最大的超限基数或序数的问题，也可以睁一眼闭一眼。毕竟，没有最大的整数这一事实，并不使人感到不安。

然而，康托尔的无穷集合论激起了许多抗议。除了我们讲过的以外，这个理论在许多数学领域上得以应用，而一些数学家们仍拒绝接受实无穷集合及其应用。克罗内克（Leopold Kronecker）与康托尔素来交恶，称康托尔为骗子。彭加勒则认为无限集合论是邪气与病态的坟墓。“下一代人”，他在1908年说，“将把集合论当作一种疾病，而人们已经从中恢复过来了。”许多其他的数学家甚至到19世纪20年代还试图避免使用超限数（见第十章）。康托尔为自己的工作辩护，他声称他是一个柏拉图主义者，相信存在一个独立于人的客观世界。人们不得不考虑这些想法并承认它们的真实性。为了对付哲学家们的批判，康托尔援引了神秘主义甚至上帝。

幸运的是，康托尔的理论得到了其他一些人的欢迎，罗素称康托尔是19世纪最伟大的智士之一。他曾在1910年说：“解决了先前围绕着数学无限的难题可能是我们这个时代值得夸耀的最伟大的工作。”希尔伯特断言：“没有人能把我们从康托尔为我们创造的乐园中驱逐出去。”他在1926年评价康托尔的工作说：“这对我来说是最值得钦佩的数学理智之花，也是在纯粹理性范畴中人类活动所取得的最高成就之一。”

关于集合论产生矛盾的原因，豪斯多夫（Felix Hausdorff）在他的《集合论基础》（1914年）中做了相当巧妙的描述，他这样勾勒了这门学科的特点：“在这个领域中什么都不是自明的，其真实陈述，常常会引起悖论，而且似乎越有理的东西，往往是错误的。”

然而，康托尔的工作使得大多数数学家感到迷惑不解，其原因全然不是因为各种大小不同的无穷集合是否可被接受。康托尔在试图确定所有集合组成的集合的基数和所有序数组成的集合的

序数时所发现的矛盾，使数学家们认识到，他们不只是在新的创造中运用了相似概念，而且在被认为是毫无问题的经典数学中就加以运用了。他们宁愿把这种矛盾叫做悖论，因为悖论是可以被解决的，而数学家们希望确信这些问题可以被解决，现在通常用的术语是自相矛盾。

让我们来看一下这些悖论吧！一个非数学的例子是这样的："所有的法则皆有例外。"而这个陈述作为一个法则也必有其例外。因此，存在一个没有例外的法则。这一类陈述是指向自身并否定自身的。

广为人知的非数学化的悖论是说谎者悖论，它曾被亚里士多德和许多后来的逻辑学家讨论过。关于这个命题的经典句式是："这个命题是错误的。"我们用 S 来表述这个命题，如果 S 为真，则所说的是真，因而 S 是错误的；若 S 为假，则所言亦为否，因而 S 又必为真。

这个悖论还有许多变体。一个人可以对他所做的某项断语这样评价："我在说谎。"这个陈述是真的，还是假的呢？如果他真在说谎，那么，他所说的就是真的；而如果他所说的是真话，则他又在说谎。还有一些变体涉及到较为间接的自指。比如，有这样两个句子："后一句话是错误的，前一句话是对的。"这就会产生矛盾。因为如果第二句话是正确的，那么第一句话就是错误的，但如果第二句话是错误的，正如第一句所言，则第二句话是正确的。

哥德尔（Kurt Gödel），本世纪一流的逻辑学家，给出了一个与上述矛盾陈述略有差异的变体：在 1934 年 5 月 4 号，A 做一单一陈述："A 在 1934 年 5 月 4 号所说的每一句话都是假的。"这个陈述不可能是真的，因为它断言了自身是假的，但它也不可能是假的，因为如果它是假的，A 就在 5 月 4 日做了一个真实陈述，而他又只讲了这一句话。

数学上真正麻烦的矛盾的开端是由罗素在 1902 年提出并告知弗雷格的。当时弗雷格正准备付印他的《基本法则》的第二卷，在那本书里他正试图建立有关数系基础的新方法（我们将在下一

章中对此多加讨论）。弗雷格所用的集合或类的理论，正好涉及了罗素在致他的信中所提到的矛盾，其内容印在罗素的《数学原理》(1903年)中。罗素研究了康托尔的所有集合组成的集合悖论，并有了他自己的观点。

罗素的悖论与“类”有关，由一类书组成的类不是一本书，因而不能属于自身；但一类想法仍可以是一个想法并属于自身。还有，目录的目录仍是目录。因此，有一些类能属于自身而另一些则不。设 N 是由所有不属于自身的集合组成的集合，那么 N 又属于谁呢？若 N 属于 N，依定义不应如此；若 N 不属于 N，则由其定义应属于 N。当罗素首次发现这个矛盾时，他认为困难可能出在逻辑的某个地方而非数学自身。但这一矛盾却动摇了元素的类这一在数学中广泛应用的概念，希尔伯特称这个悖论对数学界有着灾难性的后果。

1918年，罗素的悖论被他本人通俗化，这就是广为人知的“理发师”悖论。一个乡村理发师，宣称他不给村子里任何给自己刮脸的人刮脸，但却给所有不给自己刮脸的人刮脸，当然，理发师自夸无人可与之相比。一天他发生了疑问，他是否应当给自己刮脸？假如他给自己刮脸的话，则按他声言的前一半，他就不应当给自己刮脸；但是假如他不给自己刮脸的话，则照他自夸的，他又必须给自己刮脸。理发师陷入了逻辑上的困境。

数学中发生的另一个有代表性的悖论，最先由格雷林（Kurt Grelling）和纳尔逊（Leonard Nelson）在1908年叙述，是关于可以描述自身和不可以描述自身的形容词的。例如形容词“short”（短的）和“English”（英国的）可以修饰自身而“long”（长的）和“French”（法国的）则不然。又如“polysyllabic”（多音节的）这个词是多音节的，但“monosyllabic”（单音节的）这个词却不是单音节的。看来可以这么说，一个词或者可以用于自己，或者不可以。我们称那些能描述自身的词为同己的(autological)，称那些不能描述自身的词为异己的(heterological)。现在让我们来考虑异己的这个词自身，如果它是异己的，由于它能描写自身，所

以应该是同己的；但如果它是同己的，则依同己的定义，它要能描述自身，所以它又是异己的。这样一来，每一个关于这个词的假设都会导致矛盾，用符号来表示这个悖论就是：词 X 是异己的，若 X 并非 X。

1905 年理查德（Jules Richard）提出了另一个悖论，用的是同康托尔用来证明实数的基数大于整数的基数一样的途径。它的论述稍嫌繁复，博德内恩图书馆的贝里（G. G. Berry）将其简化，并把它交给罗素，后者在 1906 年发表了这一悖论，被称作“单词悖论”。每一个整数都可以通过若干种方式用单词描述出来，例如，5 这个数可以表示成“five”（五）这个单词或词组“the next integer after four”（四后面的整数）。现在考虑那些所有可能的用不多于 100 个英文字母进行的描述，这样至多有 27^{100} 种描述方式，因而也势必存在由 27^{100} 种描述方式所能描述的最大有限整数，那么，一定有不能用 27^{100} 种描述方式描述的整数。考虑“the smallest number not describable in 100 letters or fewer”（不能用 100 个或更少的字母描写出来的最小的整数），但这个数却正好用少于 100 个字母就描述出来了。

然而，许多 20 世纪早期的数学家不愿理睬上述这些悖论，因为它们涉及的集合论在当时是新兴的且无足轻重。其他一些人，意识到这些悖论的影响不仅限于经典数学，还关系到通常的推理，因而感到无所适从。一些人曾试图接受威廉·詹姆斯在他的《实用主义》中提出的建议，“当你遇到矛盾时，你必须澄清它。”从拉姆塞（Frank Plumpton Ramsey）起，一些逻辑学家，曾尝试区分语义造成的矛盾和真实的即逻辑上的矛盾。他们称“单词悖论”、“异己的悖论”和“说谎者悖论”为语义的，因为它们涉及到一个词的真实性和可定义性或模糊应用等概念，相应地采用这些概念的严格定义能解决上述悖论。另一方面，罗素的悖论、康托尔的所有集合的集合的悖论和布拉利-福蒂悖论被认为是逻辑上的矛盾。罗素本人并没有做这样的区分，他确信所有悖论都产生于一种他称之为恶性循环原理的谬误，他这样描述道，“凡涉及到一个

集的整体的东西必不能是该集中的一部分”。换句话说，如果定义一组元素的集而又必须用到该全集自身，则这定义是毫无意义的。这个解释是罗素在1905年给出的，彭加勒在1906年接受了它，他还杜撰了“非断言定义”这一术语，即一个要定义的对象是用包含这个对象在内的一类对象来定义的，这种定义是不合逻辑的。

举一个罗素本人在《数学原理》中提出的例子（见第八章），排中律说所有命题非对即错。但是这个定律自身也是一个命题，因此，尽管它的意图是断言逻辑定律的真实性，但它既是一个命题则也有可能是错误的，正如罗素所言，这个定律的陈述毫无意义。

一些其他的例子可能会有所帮助。一个全能的上帝能创造一个不能被毁灭的东西吗？当然可以，因为他是万能的。可既然他是万能的，他又能毁灭任意东西。在这个例子里，“万能”这个词的范围涉及到一个不合理的总体，这一类悖论，正像逻辑学家塔斯基（Alfred Tarski）所指出的那样，尽管是语义上的，也向语言自身发出了挑战。

为了解决悖论，人们还做了许多其他努力，“所有法则皆有例外”的矛盾被当作无意义而摒弃了。有人还补充道，存在语法上正确的英文句子，而在逻辑上则是无意义或错误的，如这个句子：“This sentence contains four words”（这句话包含四个单词）。另外，由于由所有不属于自身的类组成的类被当作是无意义的或不存在的，原来的罗素悖论也得到清理。“理发师”悖论的“解决”是通过断言不存在这样的理发师，或是要求理发师将自己排除在他给刮脸和他不给刮脸的人组成的类之外。正像这样的陈述：教所有在班上的人的老师要排除自己。罗素拒绝最后一种解释，他在1908年的一篇文章中表达了这样的意思，“最好是这样与一个长鼻子的人交谈：当我谈到鼻子的时候，我已经除去了那些过分长的长鼻子”，而这是一个避免一个痛苦的话题不成功的尝试。

“全部”这个词的意义是含混的，对于某些情况，一些语义上的悖论就源于“全部”这个词的用法。布拉利-福蒂悖论涉及到所有序数的类，这个类包括了整个类自身的序数吗？另一方面，异己的悖

论定义了一类单词，这个类是否包括了“异己的”这个词本身呢？

罗素和彭加勒对非断言定义的反对意见，已经广为接受了。不幸的是，这种定义曾经在经典数学中被采用过，引人注目的例子是最小上界的定义。设有由 3 到 5 之间的数组成的集合，其上界，也就是大于该集合中最大数的数，有 5、5.5、6、7、8 等等。这其中存在一个最小上界，即是 5，因此，最小上界是根据一类包含了要定义上界的上界而定义的。另一个有关非断言定义的例子是在给定区间上一个函数的最大值，最大值就是函数在该区间上所取值中最大者，这些概念在数学中是最基本的，许多分析内容都是基于它们做出的。此外，许多非断言定义还被用在其他有关的数学内容中。

尽管那些与悖论有牵连的非断言定义能够导致矛盾，但使数学家们感到迷惑的是，就他们所知而言，并非所有的非断言定义都会导致悖论。诸如，“约翰是他们队里个头最高的”和“这句话很短”之类的陈述，尽管是非定义的，却实在是无害的。陈述“在数集 1，2，3，4，5 中最大的数是 5”也是如此。实际上，采用非定义陈述是普遍的。例如，如果一个人定义了一个所有包含多于 5 个数的类所组成的类，他也就定义了一个包含自身的类。又如，由所有用不多于 25 个单词可以定义的集合 S 也包含 S。数学中充斥着这类定义，其是数学频频告急的真正起因。

不妙的是，我们没有一个标准来断定哪些非断言定义是无害的，哪些是有害的。因此，存在着发现更多的会导致矛盾的非断言定义的危险。这个问题从策梅罗(Ernst Zermelo)和彭加勒第一次讨论时起就显得很急迫，彭加勒提议禁止使用所有的非断言定义。魏尔，本世纪前半叶的顶尖数学家，担心一些非断言定义真的会导致悖论，于是做了很多努力来重新定义最小上界以避免非定义性。可他没能成功，他惴惴不安地得出结论，分析的基础是不牢固的，可能应该牺牲其中的一部分。罗素的禁令：“我们不能容许任意地确定集合和不分青红皂白地把这个集合构成其他集合的一部分”，这当然无助于解决哪些非断言定义可以被允许的问题。

尽管矛盾的基本起因看起来已经明了，但仍存在着怎样构造数学来尽可能减少这些矛盾的问题。更为重要的是，要确保数学中不再出现新的矛盾。现在，我们可以看出为什么相容性问题在20世纪初变得如此紧迫了。数学家们宁愿把矛盾看成是集合论的悖论，然而，集合论的工作确实让他们看到了在经典数学中可能存在的矛盾。

在构造坚实的数学基础的努力中，建立相容性成为要求最迫切的问题，但在20世纪初，人们也认识到，从确定已取得的成果的角度出发，其他一些问题也非次要。在19世纪后期，批判精神已经深入人心，数学家们开始重新审查以前所接受的一切。他们选定了一个看起来似乎没有问题的断言，它曾经在许多早期证明中运用过，并没有引起人们的关注。这个断言就是，给定任意一组集合，有限的或是无限的，总可以在每个集合中选取一个元素构成一个新的集合。例如，可以从美国五十个州中的每一个州选出一个人构成一个新的人的集合。

策梅罗在1904年发表的一篇论文，使数学家们意识到，上述断言实际上以一条称作选择公理的公理为先决条件。这与当时的历史情况有某些关联，为了能将超限数按照大小来排列，康托尔需要这样的定理，即任一实数集都是良序集。一个集是良序集首先其必须是有序的，有序的是指，比方说，在整数的情况下，若a与b是集合中的任意两个数，要么a位于b前，要么b位于a前。进一步，如果有a先于b，b先于c，则a必先于c。如果一个集合的任一子集无论怎样选取，都有为首元素，则它是良序集。因此，所有的正整数，按照通常次序排列，就是良序的。而按通常次序排列的实数集是有序的但非良序的，因为它的包含大于零的数的子集，没有为首的元素。康托尔曾猜测每个集合都可以良序化，他于1883年引入了这一概念，虽经使用却未加证明，而且，我们可能还记得，希尔伯特曾在1900年的国际数学家大会讲演中提出这个问题。策梅罗在1904年证明了这个定理，并在证明过程中提醒大家注意他用了选择公理这一事实。

正如过去多次发生过的一样，数学家们先是无意识地使用了某条公理，后来才不仅意识到了正在使用它，而且还得去考虑接纳这样一条公理的基础。康托尔曾在1887年无意识地使用了选择公理去证明任意无限集都有一个基数为$\aleph_0$的子集。它还曾经含蓄地运用于拓扑学、测度论、代数和泛函分析的诸多证明中。例如，它曾被用来证明在一有界无限集合中可以选取一个序列收敛于该集合中一极限点。作为最基本的应用，它还被用来从有关整数的皮亚诺公理出发来构造实数。还有一个应用是证明一个有限集合的幂集，即一个有限集合的所有子集组成的集合为有限的。1923年，希尔伯特称此公理对于数学推理的基本原理而言是不可或缺的普遍公理。

皮亚诺最早呼吁人们注意选择公理，在1890年，他曾写道，不能无限次地使用任一定理，即从许多类中的每一类抽取一个元素。在他处理的问题（微分方程的可积性）中，他给出了一个确定的选择法则从而解决了困难。列维（Beppo Levi）在1902年同样认同了这条公理，施密特（Erhardt Schmidt）则在1904年把它推荐给了策梅罗。

策梅罗对选择公理的明确使用激起了一场反对的风暴，就在紧跟着的一期颇有影响力的刊物《数学年鉴》（1904年）上，鲍莱尔和伯恩斯坦（Felix Bernstein）的论文都批驳了该定理的使用。这些接踵而至的批评意见随即以鲍莱尔、贝尔（René Baire）、勒贝格和阿达马这批领头数学家之间的交换信件形式发表在《法兰西数学会通报》上（1905年）。

批评意见的要点是，除非有一个确定的法则指定从每个集合中选取哪一个元素，否则就没有做出真正的选择，也就没有构成新的集合。若这种选择在证明过程中发生变化，则证明也就是无效的。如鲍莱尔所言，一次不合法的选择就是一次有关信念的举动，该公理已经超出了数学的范围。试举罗素在1906年给出的一个例子，如果我有一百双鞋，并宣布取出每双鞋中左脚的那一只，则我表述了一个清晰的选择。但如果我有的是一百双袜子并要说

出从每双袜子中选出哪一只来，我就没有可以依照的法则来这样做。然而，选择公理的维护者们，尽管承认可能缺少选择的法则，却看不出有这种法则的必要性。对他们来说，选择是逐一确定的，因为人们认为它们是确定的。

还有另外一些反对者和反对的依据。彭加勒承认这条公理，却不承认策梅罗对良序化的证明，因为其中存在非断言陈述。贝尔和鲍莱尔不但反对这条公理，也反对其证明，因为它没有表明良序化是怎样达到的，而只证明了可以被达到。布劳维的哲学我们将在后面讨论（见第十章），他拒不承认实无穷集，也反对选择公理。罗素的反对意见是，一个集合只有当其所有成员共有一种属性时才算是确定的。例如：可以通过戴绿帽子这一特征定义所有戴绿帽子的人的集合，但是选择公理并不要求被选定的元素具有某种确定的属性，它只是说我们能从每一个给定集合中选取一个元素。策梅罗本人，满足于在直觉意义上运用集合的概念，对他来说，从每个给定集合中选出一个元素可以清楚地构成一个集合。

阿达马是策梅罗唯一坚定的盟友，在他为康托尔的理论辩护的基础上，他力言选择公理也可接受。对于阿达马来说，对象存在的断言并不要求描述它们，如果仅是存在的断言就能使数学得到发展，那么这样的断言是可以接受的。

为了答复批评意见，策梅罗给出了良序定理的第二种证明，其中同样使用了选择公理，并指出这二者是等价的。策梅罗为公理的使用辩护说，除非它导致矛盾，否则数学就得使用它。他认为选择公理“具有一种很快会让人清楚的纯客观性质。”他同意这条公理不是严格自明的说法，因为它牵涉到无限集的选择，但它仍是一种科学的需要，因为这公理可以用来证明重要的定理。

许多选择公理的等价形式也被提了出来，如果选择公理能同集合论的其他公理一起被承认的话，这些都将成为定理。然而，所有的想用少一点矛盾的公理替代该公理的企图都未能成功，一个能被全体数学家们接受的公理看来是不大可能出现的。

关于选择公理的关键问题是存在对数学意味着什么。对一些

人来说，它涵盖了所有有用又不会导致矛盾的理性概念，如一个普通封闭表面积是有穷的；对于另一些人来说，存在意味着具体的、清晰的特征识别或概念的实例，能使人们指出或至少描述它，而仅有选择的可能性是不够的。在接下来的一些年中，这些观点的冲突更加尖锐，对此，我们将在后面的章节中详加讨论，但现在这公理成为了争论的焦点。

除了这些，在此后的几十年里，随着数学的扩展，许多数学家继续使用选择公理，它是否是合理的、可接受的数学的争论在数学家中极为盛行，它成了仅次于欧几里得平行公理而被讨论得最多的公理。正如勒贝格所评论的，由于没有一致的意见，双方除了互相攻讦以外不解决任何问题，他本人除了对这条公理采取否定的和不信任的态度外，还表示使用它，既要大胆，也要谨慎。他坚持认为未来的发展会帮助我们做出决断。

20 世纪初期，另一个问题也开始困扰着数学家们。起初，这个问题还显得不是那么紧要，但是当康托尔的超限基数和序数的理论应用得越来越广泛后，它的解决就变得十分迫切了。

康托尔在他的后期工作中，在超限序数理论的基础上，建立了超限基数理论。例如由所有可能的有限序数的集合构成的集合的基数为$\aleph$，由所有可能的，具有可数基数（$\aleph$）的集合的序数组成的集合的基数为$\aleph$。按照这种方式，他得到了越来越大的基数，并用$\aleph_0$、$\aleph_1$、$\aleph_2$…来表示，每一个都是前一个的后继者。但是，他很早以前曾在关于超限数的研究中证明过，所有实数的基数为$2^{\aleph}$，简记为c，而$2^{\aleph}$是大于$\aleph_0$的。他接下来提出的问题就是，c是$\aleph$系列中的哪一个呢？因为$\aleph_1$是$\aleph_2$的后继者，所以c应大于或等于$\aleph_1$，他猜测$c=\aleph_1$。他于 1884 年提出并发表的这一猜测，称作连续统假设*。这个假设的另一种稍微简单一些的陈述方法

* 设想一个基数为$\aleph_1$的集合，考虑其全部子集组成的集合，其基数为$2^{\aleph_1}$，而$2^{\aleph_1}>\aleph_1$，因而可以推测$2^{\aleph_1}=\aleph_2$，$2^{\aleph_n}=\aleph_{n+1}$，这就是广义连续统假设。

——原注

是，在$\aleph_0$和c之间不存在其他超限数，或实数的任意无限子集的基数是$\aleph_0$或c*。在本世纪的最初年代里，连续统假设引发了许多没有解决的矛盾，除了可以用它证明新定理之外，即使对于可用来建立集合论的无穷集，一一对应和选择公理的理解，它也显得十分重要。

这样一来，本世纪初数学家们面对着几个棘手的问题，已经发现的矛盾亟待解决，所有数学的相容性的证明更为重要，以便确信不再产生新的矛盾，这些问题都是决定性的。由于选择公理对于许多数学家来说无法接受，因而许多基于该公理的数学内容也得划个问号，它们能用一个更为人接受的公理加以证明吗？抑或选择公理整个就是多余的呢？随着新的发展，连续统假设的重要性越来越明显，它也必须被证明或证否。

尽管数学家们在20世纪初所面对的问题是严峻的，但在另外的情况下它们可能并不会引起什么巨变。的确，有一些矛盾必须解决，但实际知道的矛盾只限于集合论——也许总有一天会严格起来的新分支。至于在经典数学中可能发现新矛盾的危险，或许是由于使用了非断言定义所致，而当时相容性问题已经归结为算术系统的相容性问题，且没有人对它有疑问。实数系统已经延用了五千多年，数不清的关于实数的定理得到过证明，并没有发现什么矛盾。一条公理，现在即指选择公理，曾经被隐含地使用过，而且还要继续使用下去，可能并不会让很多人感到不安。19世纪后期的公理化运动就曾暴露出许多公理都被隐含地使用过。连续统假设在当时不过是康托尔理论的一个细节，而一些数学家还在嘲弄康托尔的整个理论。数学家们曾经面临过更严峻的困难，他们也能处之泰然，比方说，在18世纪，尽管充分知晓微积分基础中的根本困难，他们还是在微积分的基础上建立了许多分析的分支，随后分析才在数的基础上严密化。

我们引述过的这些问题好比是一根火柴，其点燃导火索，然

* 后一种形式并不涉及选择公理。——原注

后使炸弹引爆。一些数学家仍以为数学是一个真理体系，他们希望能建立起这个体系，弗雷格已经在从事这样一项活动。进一步，对选择公理的反对不仅仅限于该公理所言，以康托尔为代表的数学家引入了越来越多的理念结构，并认为它们和三角形的概念具有同等真实性。但其他一些人则抵制这些概念，认为它们过于脆弱，不能在其上构造结实的东西。关于康托尔的理论，选择公理和相似概念的基本问题是数学概念在何种意义上存在着呢？难道它们必须与物理实体相对应或是其理想化的写照吗？亚里士多德曾经思考过这个问题，对于他和大多数希腊人来说，实体对应物是必不可少的。这就是为什么亚里士多德不肯承认无限集合为一个整体及正七边形的缘故。另一方面，柏拉图主义者，康托尔就是其中之一，都相信他们所信奉的观念存在于独立于人的客观世界中，人类只是发现了这些想法，或如柏拉图所说的，回忆起它们。

存在问题的另一面是存在证明的价值问题。例如，高斯曾经证明过每个实系数或复系数的 n 次多项方程至少有一个根，但是该证明并没有指出怎样计算这个根。类似地康托尔证明过实数多于代数数（多项式方程的根），因此，存在着超越无理数。然而，这个存在性证明不能使人指出更不用说计算出哪怕一个超越数。20世纪早期的一些数学家，如鲍莱尔、贝尔和勒贝格认为纯粹的存在性证明是没有价值的，存在性证明应使数学家们能按想要达到的精度来计算存在量，他们称这样的证明为构造性证明。

还有另一个问题困扰着某些数学家。数学的公理化是同对许多明显事实的直觉接受背道而驰的。的确，这场运动去除了一些矛盾和晦涩的东西，比如在分析领域就是如此。但它也强调对于直觉是显而易见的事物的清晰的定义、公理和证明，即便它们明显到起初察觉不到对直觉的信赖的地步（见第八章）。作为结果的演绎结构既复杂，涉及面又甚广，例如，基于整数公理的有理数特别是无理数的发展都显得琐碎而复杂，所有这些，都给一些数学家，特别是克罗内克造成这样的印象，即过于做作，且不必要。

克罗内克是一个著名团体的领袖，他们觉得不必借助逻辑手段来使构造更可靠，人的直觉使人相信就足够了。

另一个争论的焦点是，随着数学逻辑体系的成长，使得数学家们意识到，即便是逻辑学原理也不能非正式和随意地使用。皮亚诺和弗雷格的理论要求数学家们在推理过程中，将属于一个类的元素和属于另一个类的类，严格地区别开来。这些区别看起来似乎是在卖弄学问，与其说是一种帮助，还不如说是一种障碍。

更为重要的是，在 19 世纪末，尽管还不是很明朗，但已经有许多数学家开始对逻辑原理无限制的适用性感到不安。什么能担保它们可以应用于无限集合？如果逻辑原理是人类经验的产物，那么，对于它们是否能扩展到没有经验基础的理念结构是有疑问的。

早在 1900 年以前，数学家们已经开始对我们刚才叙述过的这些基本问题产生分歧，而新的悖论不过是加深了已经存在的分歧。一些年以后，数学家们开始带着渴望回首在矛盾出现之前的那段短暂而幸福的时光。杜布依-雷蒙（Paul du Bois-Reymond）描述那段时光为“我们仍住在天堂里”的时候。

第十章 逻辑主义与直觉主义

逻辑学派的理论并非不毛之地，它生长着矛盾。

——彭加勒

集合论中悖论的发现，以及意识到其他经典数学中也可能存在悖论，使数学家们开始认真对待相容性问题了。由于选择公理的任意使用，就提出了这样一个问题，即数学中的存在意味着什么，而且这一问题备受瞩目。真正的无限集是不是一个合理的概念？在重构数学基础和开创新的数学分支时，越来越多地使用无穷集合将这个古老的争议重新提到人们面前，而19世纪后期的公理化运动并没有涉及这个问题。

然而，并不是这些问题和前一章中所述问题，使得数学家们重新对正确的数学基础这一问题做全面的考虑，这些问题使原来已经冒了烟的观点分歧，变成了白热化的争议。一些新的带根本性的数学方法，早在1900年之前就被提出来，并在一定程度上给予了仔细的探讨，但它们并未受到人们的注意，大多数数学家没

有认真地对待它们。本世纪最初的十年中，数学巨人之间为关于数学基础的新数学方法而爆发了一场战争，他们分裂为两个对立的阵营，并向对方宣战。

逻辑派是这些派别中的一个，其论点简言之，就是所有的数学都可由逻辑推导出来。在20世纪初，几乎所有的数学家都认为逻辑法则是一个真理体系。因此，逻辑学家们断言，数学也一定是一个真理体系，而且由于真理是相容的，因而他们说，数学也一定是相容的。

像所有的创新一样，这一论点在得到明确的形式和广泛的注意之前，许多人对它做出了贡献。数学可由逻辑推出这一观点，可以上溯到莱布尼茨。莱布尼茨区分了理性真理（或必然真理）和事实真理（或称偶然真理）（见第八章），莱布尼茨在写给朋友科斯特的一封信中解释了这一区别。一个真理是必然的，若它的否定蕴涵着矛盾；如果一个真理不是必然的，就称它是偶然的。上帝是存在的，所有的直角都相等，这些都是必然真理。而我本人是存在的，自然界中存在着某种物体，它有一个恰为90°的角，这些则是偶然真理，它们可能正确，也可能不正确。因为整个宇宙都可能是另一种结构，而上帝从无数的可能结构中选出了他认为最为合适的。数学真理是必然真理，所以它们一定是可由逻辑推出的，而逻辑的规则也是必然真理，而且在任何可能的世界体系中都是正确的。

莱布尼茨没有将由逻辑推出数学这一工作继续下去，在差不多200年的时间里，其他持有相同见解的人也没有做这件事，例如，戴德金直截了当地肯定，数不是由时间和空间的感觉得来，而是“一种纯粹思维规律的直接产物”。有了数，我们才有时间和空间的精确概念。他开始发展这一论点，但也没有继续下去。

最后，受戴德金的影响，弗雷格发展了逻辑派的理论，他对数理逻辑的发展做出了很大贡献。弗雷格相信，数学和法则是解析的，它们是蕴含在逻辑原理中的。而逻辑原理是先验真理，数学定理及其证明说明了什么是蕴含，并不是数学全部都能用于现

实世界，但它当然是包含了理性真理的。弗雷格在《概念演算》(1879年）中，在明确表述的公理之上构筑了逻辑学。此后在他的《算术基础》(1884年）和两卷著作《算术的基本法则》(1893年，1903年）中继续从逻辑前提出发，推导算术的概念和数的定义及规律。从数的规律出发，就有可能推出代数，分析甚至几何，因为解析几何是从代数形式来表述几何的概念和性质。不幸的是，弗雷格的符号体系对数学家们来说太复杂、太生疏了，因此他的工作，在当时并没有什么影响。有一个具有讽刺意味的故事。1902年正当《算术的基本法则》第二卷要付印的时候，他接到罗素的一封信，罗素说他的工作涉及了“所有集合的集合”这一概念，但这是会导出矛盾的。弗雷格于是在第二卷的结尾写道：“一个科学家再不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成的时候，它的基础垮掉了。当这部著作只等付印的时候，罗素先生的一封信，就使我陷入这种境地。”在他写这部著作的时候，弗雷格并不知道悖论已经被提出来了。

罗素独立地构想出了同样的计划，在他进一步发展它的时候，他发现了弗雷格的工作。罗素在他的自传（1951年）中说，他也受到皮亚诺的影响，后者是他1900年在第二届国际数学家大会时遇到的：

> 这次大会是我的精神生活的一个转折点，因为在那里我遇见了皮亚诺。在此之前，我已听说过他的名字，也知道他的一些工作。我突然明白了，他的符号提供了我多年来一直试图寻找的分析的工具，而且，从他那里我获得了一直以来想要从事的工作的一种新的有效的技术。

在《数学原理》(第一版，1903年）中，他进一步写道：“所有的数学都是符号逻辑这一事实是我们这个时代最伟大的发现之一……”

在本世纪之初，罗素和弗雷格一样，相信如果数学的基本定理能由逻辑推出，则由于逻辑一定是个真理体系，那么这些定理

也是真理，相容性的问题也将得到解决。在《我的哲学发展》(1959年) 中，罗素说，他试图得到“一种完美的数学，它是无可质疑的”。

罗素当然知道皮亚诺从有关整数的公理推出了实数，也知道希尔伯特为整个实数系统给出了一个公理集。然而在《数学哲学导言》(1919年) 中，他提到了有点类似于戴德金的一种策略：“我们所需要的这种假设方法有很多优点；正如窃取总是比诚实劳作来得快一样。”罗素真正关心的是十或十五条关于数的公理的假设并不能保证这些公理的相容性与真实性。正如他所说的，这一假设毫无必要地增加了未来之旅的难度。而在本世纪初，罗素还确信逻辑原理是真理因而是相容的，怀特海 (Whitehead) 则在1907 年提醒道：“不可能有关于逻辑前提本身的相容性的形式的证明。”

在许多年里，罗素一直相信，逻辑原理和数学知识的实体是独立于任何精神而存在并且仅为精神所感知的。这种知识是客观的，永恒的，这一立场在他 1912 年的著作《哲学的问题》中给予了明确的阐述。

在真理问题上，罗素的意图是要走得比弗雷格更远。年轻时他相信数学揭示了现实世界的真理，然而，在欧氏几何和非欧几何 (它们都与现实世界相吻合 (见第四章) 却彼此不相容) 中，他却不能肯定，哪一个是真的。在《关于几何基础的随笔》(1898年) 中，他确实找到了一些他认为是客观真理的数学法则，例如物理空间一定是齐次的，即在任何地方都具有相同性质。然而，一定存在一个客观的真实世界，我们能够得到关于它的正确知识，对比之下，空间的三维性则只是一个经验事实。因此罗素试图寻找具有客观真实性的数学规律，而这些规律应是可由逻辑公理推出来的。

在 1903 年的《原理》中罗素强调了关于数学的客观真理性的立场，他说：“一切关于实际存在的命题，例如，我们生活其中的空间，都来自于实验或经验科学，而不是数学。当它们属于应用

数学时，它们是通过纯数学的一个命题中的一个或多个变量赋以常数值而得到的……。”甚至在这一版中，他仍然相信一些基本的客观真理存在于由逻辑推出的数学中。对于怀疑论者没有绝对真理的观点，罗素回击道，“数学对于这样的怀疑主义，将永远责难它们，因为真理的殿堂巍然耸立，不会因为任何怀疑的讥讽而有所减损”。

罗素在他的《原理》中概要说明的思想在怀特海和罗素的详尽著作《数学原理》（共3卷，第一版1910～1913年）中得到了发展，由于这部著作是逻辑派立场的权威性论述，我们的说明将以此为本。

这个学派从逻辑本身的展开出发，谨慎地提出一些逻辑的公理，由此推出定理，它们可以用于以后的推理。和任何公理化理论一样（见第十二章），这个展开是从一些不定义的概念开始的，这些不定义的概念中有：基本命题的概念，肯定基本命题的真，一个命题的否定、二个命题的析取，以及命题函数的概念。

罗素和怀特海解释了这些概念，虽然正如他们指出的，这种解释并不是逻辑展开的一部分，他们所谓的命题和命题函数实际上是皮尔斯已介绍过的。例如：“约翰是人”是一个命题，而 x 是人，则是一个命题函数。一个命题的否定是指：“这个命题成立不是真的”。因此，如果用 p 表示“约翰是人”这个命题，那么 p 的否定（记作 $\sim p$）是指“约翰是人不真”或“约翰不是人”。两个命题 p 与 q 的合取记作 $p \cdot q$，是指 p 与 q 都必须为真；两个命题 p 与 q 的析取记作 $p \vee q$，是指 p 或 q 为真。这是“或”的意思，正如“男人或女人都可申请”中说的，即男人可以申请，女人可以申请，或者两者都可申请。“那个人是男人或女人”这句话中，“或”具有更一般的意义，即非此即彼，不能两全。在数学中按第一个意思来用“或”这个词，虽然有时只有第二种意思是可能的。例如：三角形是等腰的或四边形是平行四边形”说的是第一个意思。我们也说一个数必为正的或负的，而关于正数和负数的一些事实说明二者不能都是真的。因此在《原理》中，肯定 p 或 q 就

是指 p 并且 q 都是真的，或者 p 不真而 q 真，或 p 真而 q 不真。

在命题之间最重要的一种关系是蕴涵，即一个命题的真强制着另一个命题的真。在《数学原理》中，定义了蕴涵，记为$\supset$，它与弗雷格的实质蕴涵（见第八章）意义相同，即 $p\supset q$ 就是若 p 为真，则 q 必真；而若 p 为假，则不论 q 为真或假都有 $p\supset q$，即一个假命题蕴涵任意命题，蕴涵的这一定义至少与可能发生的事是相容的。因此，若 a 是偶数为真，则 $2a$ 必为偶数，而若 a 是偶数为假，则 $2a$ 可能为偶数或者（当 a 是分数时）$2a$ 可能不是偶数，由假命题，a 为偶数两个结论都可得到。

当然，必须要有逻辑公理才能推导定理，其中的一些是：

A. 一个真的基本命题所蕴涵的命题是真的。

B. $(p\vee p)\supset p$.

C. $q\subset(p\vee q)$

D. $(p\vee q)\supset(q\vee p)$

E. $p\vee(q\vee r)\supset q\vee(p\vee r)$

F. 由 p 的肯定和 $p\supset q$ 的肯定可得 q 的肯定。作者们由这些公理出发推导出逻辑的定理。

为说明逻辑本身已形式化，并成为演绎的推理手段，我们来看一下数学《原理》开头的几个定理。一个定理是，假设 p 蕴涵 p 不真，则 p 不真，这就是归谬原理。另一个定理是，若 q 蕴涵 r，那么就有若 p 蕴涵 q，则 p 蕴涵 r（这是亚里士多德三段论的一种形式）。一个基本定理是排中律：对于任意命题 p，p 是真的或是假的。

在建立起命题逻辑之后，两位作者开始处理命题函数，它们实际上表示的是类或者集合，因为命题函数用性质来描述集合，而不用把集合中的元素指点出来，例如，命题函数，“x 是红的”这个命题函数就表示所有红色的物体组成的集合。

罗素和怀特海当然希望能够避免由于定义一个包含自身在内作为一个元素的集合而引起的错误。他们解决这个困难的办法是要求，“任何牵涉着一个集合的所有元素的东西，都不能成为这个

集合的元素”。为了在《数学原理》中实现这一制约，他们引入了层次理论。

层次理论是复杂的，但其思想是简单的。个体（例如约翰或某一本书）是层次0。关于个体的性质的断言，是层次1，关于个体性质的命题，则是层次2，每一个断言都比它所描述的低层的事物层次为高。用集合的术语来说，层次理论说的是个体元素的层次为0；个体的一个集合层次为1；许多个集合组成的一个集合层次为2；依此类推。这样如果说a属于b，则b的层次一定比a高，同样，不能说一个集合属于它本身，当把层次理论回到命题函数上时，情况变得略为复杂一些。命题函数不能由这个函数本身定义的东西作为变元(变量的值)，因此函数就比其变量的层次要高。基于这一理论，两位作者．讨论了当时的悖论，并且说明层次理论避开了悖论。

层次理论可以避免矛盾的优点用一个非数学的例子可以更清楚地说明。我们来考虑“凡是规则都有例外”这一叙述引起的矛盾（见第九章），这一叙述是关于“任何书都有印刷错误”这样的特定的规则的，而关于所有规则的陈述，通常被解释为若用于它本身则导出了矛盾，即存在没有例外的规则。在层次理论中，一般规则具有更高的层次，因此，它关于特定的规则的陈述不能用于自已，从而一般规则不一定有例外。

类似地，“它谓”悖论，将那些不能用于自身的词定义为它谓的——是所有它谓的词的一个总的定义，因此，它比任何一个它谓的词层次都高。所以不能问一个它谓的词本身是不是它谓的。但可以问一个特定的词，比如，短的是不是它谓的。

说谎者悖论也可以通过层次理论得到解决，正如罗素所指出的，陈述句“我正在说谎”是指“我正在肯定一个命题，而它是假的”，或“我肯定一个命题p而p是假的”。若p是第n层的，则关于p的断言，层次是高于n的，因此，若关于p的断言是真的，则p本身就是假的；而若关于p的断言是假的，则p本身就是真的，但这里并不存在矛盾。用同样的方法，还能解决理查德悖论。

所有这些都涉及到一个关于低层断言的层次更高的断言。

很明显，层次理论需要对语句仔细地按层次加以区别。然而，要想按层次理论来建立数学，开展起来将极为复杂。例如：在《原理》中，两个东西 a 和 b 相等，是指如果对 b 适用或 b 成立的每一命题或命题函数，都对 a 成立，反之亦然。但是这许许多多的断言是不同层次的，因而相等这一概念，就相当复杂。类似的，由于无理数是用有理数定义的，而有理数是用正整数来定义的。无理数比有理数有更高的层次，它们都比整数的层次类型高，因此，实数系由不同层次的成分构成，于是不能得出关于所有实数的定理，而必须对每个层次的数分别陈述，因为适用于一个层次的定理，不能自动地适用于其他层次。

层次理论带来的另一复杂命题是关于有界实数集的最小上界的概念（见第九章）。最小上界定义为所有上界中最小的，因此，最小上界是用实数的集合来定义的，于是它一定比实数层次高，而它本身不是实数。

为了避免这种复杂性，罗素和怀特海巧妙地引进了约化公理。命题的约化公理认为任何较高层次的一个命题与一个层次为 0 的命题等价，命题函数的约化公理认为任何一元或二元命题函数与一个层次为 1，具有相同数目的变元（变元可以是任何层次的）的命题函数是共存的。这一公理也为支持《原理》中使用的数学归纳法所需要。

在叙述了命题函数之后，两位作者就讲到关系理论，关系是通过两个或多个变量的命题函数来表示的，这样“x 爱 y”就表示了一种关系。由关系理论得出用命题函数定义的明确的类或集的理论，在此基础之上作者们将要引入自然数（正整数）的概念。

自然数的定义当然是有点意思的，它依赖于先前引入的类之间的一一对应关系。如果两个类是一一对应的，则称其为相似的。所有相似的类，具有一个共同性质：它们的元素个数相同，而且相似的类可以有多个共同的性质。罗素和怀特海在这一点所做的，正如弗雷格做过的，是把一个类的元素个数定义为所有与之相似

的类所组成的类。这样，3 这个数目就是所有的三元素类所组成的类，而三元素的记号是 $\{x, y, z\}$，其中 $x \neq y \neq z$。因为数目的定义事先假定了一一对应的概念，看起来这个定义似乎是循环的，但是，作者指出，一个关系是一一的，如果当 x 和 x' 都对 y 有这个关系时，x 与 x' 必是恒同的，而当 x 对 y 和 y' 都有这个关系时，y 与 y' 必是恒同的。因此，一一对应的概念，并未牵涉到数目 1。

有了自然数以后，就能建立起实数系和复数系、函数以及全部分析。几何可以通过数用坐标和曲线方程来引进，然而，为了实现他们的目标，罗素和怀特海又引入了两条公理。为了定义自然数（以命题函数的形式）以及更为复杂的有理数，无理数及超限数，怀特海和罗素引进了无穷类存在的公理（类已由逻辑术语适当地定义）和层次理论所需的选择公理（见第九章）。

这就是逻辑派的宏大计划，他们在逻辑上的工作有很多可说的，我们在这里只是一带而过。我们必须着重指出的是，他们在数学上的工作，就是要把数学奠定在逻辑的基础上，不需要任何数学公理，数学不过是逻辑的主题和规律的自然延展。

逻辑派的做法受到很多指责，约化公理激起了反对，因为它显得太任意了。尽管没有证明说它是错的，可也缺乏证据说明它的正确性。它曾被说成是可喜的，意外的，而不是逻辑必需的。拉姆赛尽管是支持逻辑派理论的，但他也用这样的话来指责其公理："这样的公理在数学中是没有位置的；任何不用它就不能证明的东西，根本就不能看成是得到了证明"。另一些人说，这个公理是智力的廉价品。魏尔则明确宣布放弃这个公理。有些评论称，这个公理重新引入了非断言定义。也许最重要的问题是它究竟是不是逻辑的公理，以及由此提出的数学是建筑在逻辑基础之上这一论点是否确实可靠。

1909 年彭加勒说：约化公理比数学归纳法更靠不住，更含糊不清，前者实际是用后者来证明的，它是后者的另一种表现形式。但是数学归纳法是数学的一部分，是构筑数学大厦必需的。因此，我们不能证明其相容性。

罗素和怀特海在《原理》第二卷第一版（1910年）中说明引入这一公理的理由是为了得到某些特定结果。很明显地，他们为使用了这个公理而不安，这里是作者为它作的辩解：

> 说到约化公理，既然它支持的推理和由它产生的结果，看起来都是合乎情理的，所以直觉上它应该是正确的，然而尽管不大可能证明它是错误的，却也不大可能证明它是由一些基本或更明显的公理推导出来的。

后来，罗素自己也很关心约化公理的使用，在他的《数学哲学导论》（1919年）中，罗素说：

> 从严格的逻辑化来看，我找不出任何理由来相信约化公理是逻辑必然的，这就是说，它在所有可能的世界中都是真的。因此，在逻辑体系中，承认这个公理是个缺憾，即使从经验来看是真的。

在《原理》的第二卷第二版（1926年）中，罗素重新叙述了约化公理，但这产生了一些新的困难。比如，不允许高阶无穷，省去了最小上界定理，并使得数学归纳法的使用更为复杂。罗素再一次说明他希望能从更明显的公理中推导出约化公理，然而他又一次承认其是逻辑的缺憾。罗素和怀特海在数学《原理》的第二版中一致认为，“这个公理有着纯粹的实际的合理性，它导出想要的结果而不是其他。”他们也意识到它能导出正确结论的事实并不是一个很有说服力的论据，因而做了各种尝试，把数学归结为不含约化公理的逻辑。但他们并没有深入地探讨，而且有些作法被批评为引入了错误的证明。

对逻辑基础更多的批评，指向了无穷公理。批评的焦点在于，整个数学的结构根本上是建立在这个公理的正确性之上，然而却没有丝毫理由来相信其真理性。更糟的是，根本没有办法对其真理性做出判定。而且，它是不是个逻辑公理也还是个问题。

凭心而论，应该指出的是，罗素和怀特海对于将无穷公理作为逻辑公理也很踌躇，他们被这个公理的内容具有“真实的外

表”这一事实所困扰，困扰他们的不仅仅是它的逻辑性，还有它的真实性。《数学原理》中术语“个体”的一种解释是构成宇宙的终极粒子或元素，这样一来，尽管无穷公理是以逻辑术语表述的，它却似乎提出了这样一个问题，即宇宙是否由有限个或无限个终极粒子构成的，这个问题或许物理学能够回答，但肯定不是数学或逻辑学所能回答的。然而，如果引入无穷集，如果要证明用无穷公理推导出来的数学定理是逻辑定理，似乎就必须将它作为一个逻辑公理来接受，简而言之，如果将数学“归结”为逻辑，那么，逻辑似乎就一定要包含无穷公理。

罗素和怀特海，还使用了选择公理（见第九章），他们称之为乘法公理：给定一个不相交类（互斥类）的类，且它们中没有空类，则存在一个类，恰由每个类中的一个元素组成。我们知道，这个公理所引发的讨论和非议，比其他任何公理都多——除了欧几里得的平行公理。罗素和怀特海为选择公理同样感到不安，他们不能说服自己把它和别的逻辑公理同样地当作逻辑真理。然而，若将由这个公理推出的经典数学归结为逻辑，同样也只有承认它是逻辑的一部分。

约化公理、无穷公理及选择公理的使用，对整个逻辑的观点，即数学可以从逻辑推导出来，提出了质疑：逻辑与数学的区别在哪儿呢？逻辑派观点的拥护者说，《数学原理》中所用的逻辑是“纯逻辑”或“纯化了的逻辑”；另一些人则对于三个有争议的公理耿耿于怀，对所用的逻辑的“纯粹性”提出疑问，因此他们否认数学甚至数学的任何一个重要分支已被归结为逻辑。有些人则愿意将逻辑一词的意义加以推广，使它能包含这些公理。

罗素是坚定的逻辑派观点的捍卫者。有一个时期他为他和怀特海在《原理》第二卷第一版中所做的一切作辩解，在《数学哲学导论》（1919 年）中他说：

> （数学和逻辑的）同一性的证明，当然是细节问题。从逻辑和数学共同接受的前提出发，用演绎的方法得到显然是数学的结果，我们就会看出，不

> 可能画出一条清晰的分界线，其左边是逻辑，右边是数学。如果还有些人不肯承认数学和逻辑的同一性，我将提请他指出，在《数学原理》的一系列定义和推导中，他们认为在哪儿是逻辑的结束，哪儿是数学的开始。显然，任何答案都不可能是准确的。

考虑到20世纪初时关于康托尔的工作和选择公理以及有关无穷公理的非常尖锐的争论，罗素和怀特海没有限定把这两个公理作为他们的整个系统的公理，而只是在特定定理中用到了这两个公理（《数学哲学导论》1926年，第二版）。然而，有很大一部分经典数学的推导必须用到它们，在《原理》第一卷的第二版（1937年）中，罗素已放弃了最早的观点。他说："什么是逻辑的原理，已经变得相当任意了"。无穷公理和选择公理"只能通过经验来证实或否证"。不过，他仍然坚持逻辑和数学是统一体。

然而，批评并未就此中止，魏尔在《数学和自然科学的哲学》（1949年）中说，《原理》中数学的基础

> 不仅仅是逻辑，还有一种逻辑学家的天堂，一个具有某种结构极为复杂的，"终极内涵"的宇宙。……有哪个头脑现实的人会敢说他相信这个超自然的世界呢？……这个复杂的结构对我们信仰力量的压制，并不亚于早期教会神父或中世纪经院哲学的教条。

还有一个关于逻辑主义的批评，尽管在《原理》的三卷中都没有发展几何学，但很清楚，正如我们前面提到的，使用解析几何就可以做到这一点。不过，也有人指出说，《原理》通过归约为自然数的公理集，就把算术、代数和分析归约为逻辑，但是数学的"非算术"部分，例如几何、拓扑学和抽象代数，并没有归约为逻辑。这一观点被逻辑学家卡尔·汉普尔（Carl Hempel）接受，他说：尽管在算术中可能"以纯逻辑概念的术语"给未定义概念或原始概念赋以习惯的意义，"类似的过程却不能用于非算术派生的那些规则中"。另一方面，逻辑学家奎因（Willard Van Orman Quine）则认为"数学可以归约为逻辑"。因为对几何来说，"一种

约化为逻辑的方法唾手可得”，而且拓扑学和抽象代数“符合逻辑的一般结构”。罗素本人则怀疑是否能单从逻辑推出所有的几何。

对于整个逻辑派的观点，还有一种严厉的批评。即：假如逻辑派的看法是正确的，那么，全部数学就是一种纯形式的，逻辑演绎的科学。它的定理遵循思维的规律，而思维规律所做的精巧的演绎，是如何表示广泛的自然现象，数的运用、空间几何、声学、电磁学以及力学的，则似乎无法解释。魏尔就此讥讽逻辑派是从无到无。

彭加勒也同样对其认为是无意义的逻辑符号操作持批评态度。关于他的观点，我们在后文中将给予更多的描述。在 1906 年的一篇随笔中（这时罗素和希尔伯特已经对他们的方案给出了充分的描述），他说：

> 这门科学（数学）不必单只为了自己的缘故而永久地注视着自己的肚脐；它与自然相联，而且必然会有回归自然的一天。那时必然要将这些纯语言的定义抛弃，而且不会再为这些空洞的词语所蒙蔽。

在同一篇随笔中，彭加勒还说：

> 逻辑主义必须加以修正，而人们一点也不知道还有什么东西可以保留下来，毋需多说，这里指的是康托尔主义和逻辑主义；真正的数学，总有它实用的目的，它会按照它自己的原则不断地发展，而不理会外面狂烈的风暴，并且它将一步一步地去追寻它惯常的胜利，这是一定的，并且永远不会停止。

另一种对逻辑派的严肃批评断言，在数学的创造中，感性的或想象的直觉必须提供新的概念，而不管它是否来自于经验。否则的话，新的知识从哪里产生呢？但是在《原理》中，所有的概念都归约为逻辑概念。形式化显然在任何实际意义下，都不能表示数学，它只有外壳，没有内涵。罗素本人在另一场合曾说：数学是这样一门学科，在其中我们永远不会知道自己所讲的是什么，也不知道我们所说的是不是真的。这就可以用来反驳逻辑主义。

新的思想如何被引入数学？如果数学的内容可以全部由逻辑推出，那它怎么能用于现实世界？对此并不容易回答，罗素和怀特海也没有给出回答。逻辑主义不能解释为什么数学适用于物理世界这一论点被数学适用于基本物理原理这一事实反驳了。而这一点，只要涉及到实在，就成了前提。数学技术勾画出物理原理的含义，譬如说 PV＝常数，$F=ma$。这结论仍然适用于物理世界，这就产生了疑问：为什么世界符合数学推理呢？我们后面将要回到这个问题上来（见第十五章）。

在《数学原理》第二版出版后的几年中，罗素继续考虑逻辑派的方案，在1959年的《我的哲学发展》中他承认他的哲学发展，就是由逐步放弃"欧几里得主义"到尽可能地拯救其确实性构成。毫无疑问，对逻辑主义的批评，影响了罗素后来的思想。本世纪初罗素刚开始他的工作时，他认为所有的逻辑公理都是真理。在《数学原理》1937年的版本中，他放弃了这个观点，他不再相信逻辑的原理是先验真理，而数学是从逻辑推导出来的，所以它也不是先验真理。

如果逻辑的公理不是真理，那么逻辑主义就没有回答数学的相容性这一最为重要的问题。含义模糊的约化公理使相容性陷入了更大的窘境。在《数学原理》的第一、二版中，罗素对于接受约化公理的原因是："由它可以推出许多毋庸置疑的命题，如果约化公理是错的，那就没有同样可信的方法可以保证这些命题的正确性了，并且从它也推不出什么可能错误的命题"。罗素解释的这番原因，实际上并没有什么意义。《数学原理》中接受的（在许多逻辑系统中也接受的）实质蕴涵，甚至当其原命题不成立时，也允许蕴涵成立。因此如果一个假命题 p 被作为公理引入，则 p 隐含 g 可以在此体系中成立而且 g 仍然可能真。既然在《数学原理》的逻辑中，一个"不容置疑"的命题，可以从一个错误的公理中推出来，因此，这样一个论点是毫无意义的。

《原理》受到许多方面的批评，我们在上面并没有给予明确的考虑。型的分层证明是有效的和有用的，但它是否完全达到了它

的目的，我们并不确定。型的方法的引入是为了防止产生悖论，而且它确实有效地阻止了集合论和逻辑中已知悖论的产生，但这并不能保证不会出现新的悖论，届时型的分层恐怕也于事无补。

然而，有些卓越的逻辑学家和数学家，例如奎恩和丘奇(Alonzo Church)尽管对逻辑主义的现状有所指责，却仍大力倡导它。许多人从事着消除其缺陷的工作。一些并不全然赞同逻辑主义观点的人说，逻辑，继而数学，是分析的，也就是说，它仅仅是对公理所陈述的扩充。这样，一些逻辑派方案的热心支持者，转而去寻找消除它引起反对的原因和它发展中的一些冗赘之处，这被一些人视之为遥不可及的理想。还有一些人，攻击它是完全错误的数学概念。总而言之，就那些可疑的公理和冗长而复杂的发展来看，批评者们有充分理由说逻辑主义是由不确定的假设来推出已知结论的。

另一方面，罗素和怀特海的工作确实做出了贡献。逻辑的数学化始于 19 世纪后期（见第八章），罗素和怀特海进行了一次彻底的完全符号形式的逻辑公理化运动，从而大大推动了数理逻辑这门科学。

对逻辑主义也许可以用罗素在《记忆之像》中的一段话作为最后的总结：

> 我像人们需要宗教信仰一样渴望确定性，我想在数学中比在任何其他地方更能找到确定性。但我发现，许多数学证明——我的老师希望我接受——却是错误百出。而且，假如真的在数学中找到了确定性，那它一定是数学的一个新领域。它有比迄今为止认为是安全的领域更加坚实的基础。但当工作进行时，我不断地想到大象和乌龟的寓言。把大象置于整个数学的基础上之后，我发现大象摇摇欲坠，于是再造一个乌龟来防止大象倒下，但这乌龟不比大象更安全。而在经过 20 年左右的艰苦工作后，我得出的结论是，在对于使数学更确信无疑这一工作

上，我已无能为力。

在《我的哲学发展》(1959年）一书中，罗素承认“一直以来，我希望在数学中找到的绝对的确定性消失在一个令人迷惑的迷宫中了。……它确是一个复杂的概念的迷宫。”而这也不是罗素一人的不幸。

正当逻辑主义形成之时，一群称为直觉主义者的数学家们使用了截然不同、全然相反的方法来证明数学的确定性。逻辑主义者越来越依赖于精巧的逻辑来加固数学的基础。而另一些人却在偏离甚至放弃逻辑，这真是数学史上最富矛盾的一件趣事。从某一方面来说，二者追求的是同一目标。19世纪后半期的数学从阐述现实世界设计的固有法则这一意义上来说，已经放弃了对真理的追求。早期的逻辑主义者，特别是弗雷格和罗素，相信逻辑是一个真理体系。因此，如果数学确实是建立于逻辑之上，则它也是真理体系，尽管他们最后从这一立场退到了只要实用认可的逻辑原理上。直觉主义者则通过唤醒人们内心所确认的约束意识来寻求数学真理。从逻辑原理所推导出来的东西，不比直接感悟的更可信，悖论的发现，不仅肯定了逻辑主义不可信，也促进了明确的直觉主义观念的形成。

从广义的角度来讲，直觉主义可以追溯到笛卡尔和帕斯卡。在《思维的指导法则》一书中，笛卡尔说：

> 我们不惮错漏地在此公布知性上升为知识的途径，这样的途径有两种：直觉和演绎。我所说的直觉并非各种感觉的验证，也不是被自然而然夸大的想像的错误判断，它是来自于缜密的头脑中的概念。它是如此清晰和明白，对于它所理解的东西，根本不含任何可疑之处，或者说——两种说法其实是一样的——审慎而缜密的头脑中自明的概念，是仅由理性获得的概念，并且因为更简单而比演绎本身更确定。尽管我们在前文中所说，在演绎过程中，人的头脑也不会出错。因而，我们每个人都可凭直觉

> 知道：我们存在、我们思考、三角形仅由三边围成、球面由单面所围成、以及如此种种。
>
> ……
>
> 也许有人要问，为什么要在直觉中加入这种由演绎得来的其他类型的知识，也就是说，加入了从我们对其有确定知识的事物中得到其必然结果的过程。我们不得不采用这第二步，因为对于许多并不是自明的事物，只要它们是从真理和无可争辩的原理中而来，并经过连续不可分的思维活动（对每一件事都有清楚的直觉）得到，那么它们就会打上确定性的烙印。正如这样一种情况：尽管我们不能在一瞥之间就把一条长链中的所有中间环结尽收眼底，但如果在依次看过以后，我们能回想起它们从头到尾都是一环扣着一环的，那么，我们就可以知道最后一环和第一环是连在一起的。这样，我们将直觉和演绎区分开来，因为在后一种情况中我们构想了某种步骤或顺序，并且与前一种情况中的不同。……由此，我们便通过直觉或演绎（这要取决于我们如何看待它们）得到直接出自于原理的命题。尽管这些原理本身只能由直觉知晓，而稍远的结果则只能依靠演绎得到。

帕斯卡也十分相信直觉，在数学研究中，他表现出了极强的直觉力，他预见到了重大的结果，作出了超人的猜测，并找到了捷径。后来他视直觉为一切真理的源泉，在这方面他的一些话久已闻名于世。“心有其理，非理之所能知。”“推理是那些不明真理的人用以发现真理的迟钝、愚笨的方法。”“孱弱无能的理智啊，你该有自知之明”。

从很大程度上来说，直觉主义是由哲学家康德开始的。尽管他主要是个哲学家，但康德于 1755 年 1770 年间却在哥尼斯堡大学教授数学和物理，他认为我们的所有感觉都来自于一个预先假

定的外部世界。然而，这些感觉或感性知识并不能提供多少知识，所有感性知识都包含了感知者和被感知物体间的相互作用。心智将这些感性知识梳理清楚，得到对空间和时间的直觉。空间和时间并不是客观存在的，而是心智的创作。心智，为经验提供了对空间和时间的理解，而经验只是唤醒心智。知识可能是从经验开始的，但并不真正来源于经验，而是来源于心智。独立于经验，我们可以在先验的或真正的知识中前进多远，数学是其光辉的例证。康德称这样一种方法为综合方法。即它能够提供新的知识，而分析的命题，例如“所有物体都是可延展的”，并不能提供新的知识，因为延展性是物体固有的属性。相反，直线是两点间的最短距离，这一命题是综合的。

尽管康德在肯定欧氏几何是先验综合真理这一点上是错误的，这却是他那个时代中哲学家和数学家普遍信奉的观点。由于这一错误，后起的哲学家和数学家便对他的哲学体系抱怀疑的态度。然而，康德关于时间是直觉的一种形式的分析，以及心智提供基本真理的普遍观点却具有经久不衰的影响力。

如果数学家们对笛卡尔、帕斯卡、康德这些人的观点了解得更多一些，他们就不至于被直觉派的思想所震慑，至少在刚开始的时候，这种思想被认为是过于偏激了。不过，笛卡尔、帕斯卡或康德都没有提供一种对全部数学的直觉方法，就数学基础的方法而言，直觉主义确实是现代的。

现代直觉主义最近的先驱是克罗内克，他的警句（在一次餐后演说中所说）“上帝创造了整数，其他的都是人的工作”广为人知。在他看来，像康托尔和戴德金通过一个一般集合论得出的普通整数的复杂的逻辑推导，比直接接受整数还不可靠。因为在直观上这是清楚的，而且无需更可靠的基础。除整数外，所有的数学结构必须建于具有清楚意义的术语的基础之上。克罗内克建议把实数系统的结构建立在整数和可以计算实数的方法基础之上，而不是仅仅给出一个一般的存在定理，因此，他接受了无理数，因为它们是多项式方程的根，且是可以计算的。

康托尔证明了存在超越无理数，即不是代数方程的根的无理数。1882年，林德曼（Ferdinand Lindermann），证明了π是一个超越无理数，就此，克罗内克对林德曼说“你那关于π的美妙的探讨有何用处呢？既然根本不存在这样的无理数，为什么要研究这样的问题呢？”克罗内克并不是否认所有的无理数，而仅仅是针对那些不能提供怎样计算的证明的。林德曼的证明不是构造性的，事实上，借助于π的一个无穷级数表示式，π可计算到小数点后的任意位，但克罗内克并不接受这个级数的导数。

克罗内克只承认“潜无限”，因此，他拒绝接受无穷集和超限数。他认为：康托尔在这一领域的工作不是数学，而是玄学，经典分析只是文字游戏而已。他应该加上这么一句：如果上帝还有另一种数学，他应为他自己而创建。克罗内克陈述了自己的观点，但并未继续发展下去，也许，他对自己偏激的观点并不是太认真。

鲍莱尔、贝尔、勒贝格可称为半直觉主义者，他们对选择公理的反对我们已有论述。他们把实数系作为基础，他们的详细观点颇具历史意义。因为，尽管他们关于具体的事物有着自己的看法，但他们都没有能深化一门系统的哲学。彭加勒与克罗内克一样，认为不必定义整数，或在公理基础上构造它们的性质。因为我们的直觉先于这一结构而存在。彭加勒还认为，数学归纳法并不真正保证结论的普遍性和新结果的产生，它听起来是直觉的，但却不能把这一方法归结为逻辑。

彭加勒认为，数学归纳法的本质还需要检验，因为它至今仍是争论的一个核心。用这种方法，例如，要证明对所有的正整数n有

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1) \tag{1}$$

需要证明$n=1$时结论为真，然后证明若对于正整数k结论成立，则对于$k+1$也成立。因此，彭加勒提出，这种方法引入了无限多个变量。这种方法肯定，由于（1）在$n=1$时为真，故$n=2$时为真。由于$n=2$为真，则$n=3$时为真；如此类推，对所有的正整

数都为真。由于没有容括无限个变元的逻辑原理，因而归纳法并不能从这样的原理推出。因此，彭加勒认为相容性并不能由所谓的数学到逻辑的归约得到证明。

至于说到无穷集，彭加勒认为“真正的无限并不存在，我们所说的无限，只是无论已有多少物体存在，但创建新的物体的无穷的可能性仍存在。”

彭加勒全然反对繁杂的符号逻辑方法，在他的《科学与方法》中，他甚至讥讽它。他说到了布拉利-福蒂在1897年的一篇文章中对整数的定义简直是个符号的迷宫。彭加勒说，这对于从未听说过数1的人来说，是个绝好的定义。他又进一步地说：“我很担心，这个定义包含了一个预期理由*，因为我注意到了其前半部分的数1和后半部分的字非。”

彭加勒接着便援引了库蒂拉这位早期的逻辑主义支持者关于零的定义，零是“空类的元素个数。那么什么是空类呢？空类是不含元素的类。”库蒂拉接着又给出了符号化的定义。彭加勒解释说：“零是满足一个永远不能满足的条件的物的数目。但是因为‘永远不能’指的是‘在任何情况下都不’，我无法看出这里有任何大的进步。”

随后，彭加勒批评了库蒂拉关于数1的定义。库蒂拉说，1就是任何两个元素都相同的类的个数。“但是，如果我们问库蒂拉，2是什么时，恐怕他又不得不使用1了”。

直觉主义的创始人，克罗内克、鲍莱尔、勒贝格、彭加勒和贝尔都是数学巨匠，他们对标准数学证明和逻辑派的方法提出了大量的批评，他们提出了新的原理，但其成就却是零星和不完整的。他们的观点由荷兰数学教授、也是直觉主义哲学的奠基人布劳维并入了一个明确的阐述中。布劳维在他的博士论文《论数学的基础》（1907年）中提出直觉主义哲学。从1918年开始他在许多杂志上阐述和发展了他的观点。

---

* 一种逻辑错误。把未经证明的判断作为证明论题的依据。　——译注

布劳维在数学上的直觉主义立场来源于他的哲学。数学是起源和产生于头脑的人类活动，它并不存在于头脑之外，因此，它是独立于真实世界的。头脑识别基本的、清晰的直觉，这些直觉不是感觉或经验上的，而是对某些数学概念直接的确定，其中包括整数。基本的直觉是对一个时间序列中的不同事件的确认，“当时间进程所造成的贰性（twoness）的本体，从所有的特殊事件中抽象出来时，就产生了数学。所有这些贰性的共同内容所留下来的空洞形式就变成数学的原始直觉，并且由无限反复而产生了新的数学对象。”布劳维认为无限反复意指自然数的连续序列的形成。康德、哈密尔顿（在他的《代数：时间的科学》中）以及哲学家叔本华（Arthur Schopenhauer）都曾坚持整数来源于时间的直觉这一思想。

布劳维认为数学思维是智力构造的一个过程，它建造自己的天地，独立于经验，并且只受到必须建立于基本的数学直觉之上的限制。这种基本的直觉概念不应被理解为像在公理理论中的那种未下定义的概念，而应设想为某种东西，只要它们在数学思维中确实是有用的，用它就可以对出现在各种数学系统中的未下定义的概念做出直观上的理解。另外，数学是综合的，它包含的是真理而不是推导出逻辑的隐含意义。

布劳维认为“要在这个构造过程中发现数学唯一可能的基础，必须再三思考，反复斟酌：哪些论点是直觉上可接受的，头脑中所自明的；哪些不是。”是直觉而不是经验或逻辑决定了概念的正确和可接受性。当然，必须记住，这一陈述并未否认经验所起的历史作用。

除了自然数以外，布劳维坚持认为加法、乘法和数学归纳法在直觉上是清晰的。而且，当头脑已获得自然数 1，2，3……的概念后，使用“空洞形式”无限重复的可能性，从 n 到 $n+1$ 的步骤，就产生了无穷集合。然而，这种集合只是潜无穷，因为对于任一给定的有限数集，总可以加入一个更大的数。布劳维否定了康托尔的所有元素都“一下子”出现的无限集，并因此否定了超限数

理论、策梅罗的选择公理以及使用了真正的无限集的那部分分析。在 1912 年的一次演讲中，布劳维确实接受了直至 ω 的基数和可数集。他还承认了由有理数序列无规则排列所定义的无理数，即“自由选择的序列”。这一定义是模糊的，但确实给出了一个实数的不可数集。而在另一方面，几何则涉及到了空间，因此，它不像数那样是完全受我们头脑支配的，综合的几何学属于物理科学。

关于无穷集的直觉派的观点，直觉主义者魏尔在 1946 年的一篇文章中写道：

> 数目的序列，其增长超过任何一个已达到的阶段，……它是一簇开向无穷的可能性；它永远处于创造的状态中，并不是一个本来就存在的封闭王国。我们盲目地把一个转换为另一个，这正是我们的困难（包括那些矛盾）的真正根源——这是比罗素的恶性循环原理所指出的更为基本的根源。布劳维让我们睁开了双眼，他使我们看到：在超越一切人类所能实现绝对信仰中培育起来的经典数学走过了头，它与那些可称为真实意义和真理（以显明为基础）的命题间究竟有多远。

布劳维接着讨论了数学与语言的关系。数学是一个完全自足的活动，它独立于语言，措辞和语言表达只是为了阐述真理，数学思想更深地扎根于人脑中而不是在语言中。数学直觉的世界与感知的世界相对，语言作为理解一般事物的工具存在于后者中，而不是数学中。语言通过符号和声音唤起人脑中思想的摹本，其区别类似于爬山的行动与用语言来描述这一行动之间的区别。但是数学思想不依赖于语言的外衣，并且事实上要更为丰富。就算采用了包括符号语言的数学语言，思想也无法被完全地表述出来。此外，语言与真正数学的主旨也是大相径庭的。

更有意思的是直觉主义关于逻辑的立场，这一点在它反对逻辑主义时尤为突出。逻辑属于语言，它提供了一套规则体系，用

以导出更多的词语关系，这也是为了交流真理。然而，这里所说的真理在被从直觉上领悟之前并不是真理，而且也并不能保证它一定能被领悟到。逻辑并不是发现真理的可靠工具，用别的方法不能得到的真理，逻辑也一样不能推导出来。逻辑的原则是在语言中归纳观察到的规律性。它们是运用语言的一种手段，或者说，它们是语言的表现理论，逻辑只不过是一座宏伟的语言大厦。数学上最重要的进展不是通过完善逻辑形式而是通过变革其基本理论来得到的，是逻辑依赖于数学，而不是数学依赖于逻辑。逻辑远不如我们的直觉概念可靠，数学也并不需要逻辑来保证。历史上，逻辑原理是从有限的物体集合的经验中抽象出来的，而又符合一个先验的有效性，于是，也就适用于无限集合了。

由于布劳维不承认任何先验的，有约束力的逻辑原理，也不承认这种从公理推导结论的数学工作，因此他拒绝接受 19 世纪后期的公理化运动和逻辑学派。数学不受逻辑规则的限制，懂得数学并不需要懂得形式的证明，由于这一原因，那些悖论变得无足轻重。悖论是逻辑而不是真正的数学的缺陷，因此，相容性这个魔鬼没有任何的意义。相容性肯定是正确思想的结果，这些思想是有意义的，其正确性可以通过直觉来判定。

然而在逻辑的领域中确有一些清晰的、直观上可接受的逻辑原理或程序，它们可以用来从老定理中确定新定理，这些原理是基本数学直觉的一部分。可是并非所有的一般逻辑原理都可被基本直觉所接受，我们对从亚里士多德时代以来就被接受的逻辑原理必须要有所判别。数学家们一直是过于随便地使用着有限制的亚里士多德法则，以至于导致了自相矛盾。直觉主义者会问，在处理数学结构时，如果偶尔忽略了直觉而工于语言结构，那么什么又是允许的或安全的呢？

因此，直觉主义者们对哪些逻辑原理是允许的进行了分析，以使通常的逻辑与正确的直觉一致并能把它正确地表达出来。布劳维引用了排中律——这个被用得过于随便的逻辑原理为例。这个原理在历史上起源于推理在有限集合上的应用，并由此抽象而来。

它肯定两个有意义的断言或真或假，后来它就被认为是一条独立的、先验的法则，并且不加证明地被应用到无穷集合上去了。对于有限集可以通过检验每一个元素来判断是否所有的元素都具有某个特定的性质，而对于无限集合这个规则则不可实现。我们可能碰巧得知一个无限集合中的某个元素不具有这个性质，或者通过构造某种集合得知或证明每个元素都具有这个性质。但无论如何，我们都不能用排中律来证明这个性质是成立的。

这样，如果有人证明了在一个无限整数集中，不是所有的元素都是偶数，而得到至少存在一个奇数的话，该结论将被布劳维所否定，因为这一论证把排中律应用于无限集合。但是，此类论证在数学实体的存在性证明中被广泛地采用，例如在证明每个多项式方程都有一个根中（见第九章）就用到了它，因此许多存在性证明是不为直觉主义者所接受的。他们说，这样的证明对假定存在的实体来说太模糊了，排中律只可用于有限集合的情况。因此，对于一个有限整数集，如果证明了不是所有的元素都为偶数，那么就可以得出至少有一个为奇数的结论了。

魏尔对直觉主义关于逻辑的观点做了如下扩充：

> 根据他（布劳维）的观点和对历史的知识，经典的逻辑是从有限集及其子集的数学中提取出来的。……忘记了这一有限的起源，人们就会错误地把逻辑看作是高于并且先于全部数学的某种东西，从而最终不加证明地将其应用到无限集合的数学中去。这是集合论的堕落和原罪，而悖论的出现就是其应受的惩罚。令人惊讶的不是这种矛盾的出现，而是矛盾出现得如此之晚。

后来魏尔又补充道，“排中律可能对上帝来说是有效的，他能够一下子检查完自然数的无穷序列，而对于人的逻辑，这一点却是做不到的。”

布劳维在1923年的一篇论文中给出了一些定理的例子。如果我们否定排中律在无限集合上的应用，那么这些定理就是不成立

的。* 尤其是波尔查诺-维尔斯特拉斯（Bolzano—Weirstrass）定理——每个有界无穷集有一极限点——是不能证明的。闭区间上连续的函数存在极大值也是不能证明的。还有海涅-鲍莱尔（Heine-Borel）定理，即从任一个包含或覆盖一个点的区间的区间集中可选出有限个覆盖该区间的集，也遭到了否定。当然，这些定理的推论也是不可接受的。

除了反对不受限制地使用排中律来建立数学实体的存在以外，直觉主义者还提出了另一要求。他们反对用所有元素的属性来定义集合，例如，用红色这个属性来定义集合。直觉主义者认为适于进行数学讨论的概念或对象——确实存在的对象——必须是可构造的；也就是说，必须给出一种方法来在有限步骤内举出一个或多个实体，或者一种能将其计算到任意精度的方法**。这样，π 是可以接受的，因为我们可以把它计算到任意小数位。如果只是证明了存在整数 x、y、z、n 满足在 $n\geqslant2$ 时，$x^n+y^n=z^n$，但并未将这些数具体化，那么，直觉主义者是不会接受这一证明的。另一方面，素数的定义是构造性的，因为可以用有限的步骤确定一个数是否为素数。

我们来考虑另一个例子。孪生素数是两个形如 $l-2$ 和 l 的素数。例如，5 和 7，11 和 13 等等。是否存在无穷多对这样的孪生素数在数学上一直是悬而未决的问题。让我们任意定义一个使 $l-2$ 也是素数的最大素数 l，如果这样的 l 不存在，则定义 $l=1$。经典主义者认为 l 的定义是无懈可击的，不论我们是否知道有最后一对这样的孪生素数存在。因为，由排中律可知，这样的最后一对数要么存在，要么不存在。在第一种情况下，l 是使 $l-2$ 为素数的最大素数。而在第二种情况下 $l=1$，我们不能实际计算出 l 的这

* 从我们这里的目的出发，定理这个词的专用意义毋须深究。这里只是用来给出特定的例子。 ——原注

** 彭加勒是个例外。他认为形式主义者（见第十一章）可以接受不导致悖论的概念。 ——原注

一事实对于非直觉主义者来说是无所谓的。但是直觉主义者不接受上述 l 的“定义”是有意义的，除非可以计算出 l，即除非是否存在无穷多对孪生素数这一问题得以解决。用选择公理构造无穷大的集合也是不被接受的。上面的一些例子说明：有些存在性证明不是构造的。因此，除了它们可能用了排中律以外，还有其他的理由来拒绝接受它们。

魏尔认为，非构造性的存在证明告诉世人宝藏的存在，但并未说明其地点。当用这样的证明来代替构造性证明时，其重要性和价值不可能毫无损减。他还指出，坚持直觉主义哲学意味着放弃经典分析的基本存在定理。魏尔称康托尔有关超限数等级的论述有如雾中之雾。他在《论连续》（1918 年）中写道，分析是建立在沙地上的楼阁，只有由直觉方法建立起来的东西才是确定的。

对排中律的否定产生了一种新的可能性——不可判定的命题。对于无穷集合，直觉主义主张还有第三种状况，即可以有这样的命题，既不是可以证明的，也不是不可以证明的。他们给出了下面的例子：让我们定义 π 的十进制展开式的第 k 位出现了第 1 个零，其后依次跟着 1 到 9 这些整数。亚里士多德的逻辑认为 k 或者存在，或者不存在。遵循亚里士多德的数学家则以此两种可能性为基础进一步进行论证。布劳维和直觉主义者普遍反对所有这类论证，因为我们并不知道我们是否能够证明 k 存不存在。因此，根据直觉主义者的观点，一些明白而重要的数学问题永远不能在任何一种数学基础上得到解决。这个问题对于我们来说似乎是可以断定的，但实际上我们信念的基础只不过是因为它们涉及到了过去已经断定了的数学概念和问题。

按直觉主义者的观点，关于实数系、微积分、现代的实函数理论、勒贝格积分以及其他方面的经典结构和逻辑主义结构是不可接受的。布劳维和他的支持者们没有局限于批评，而是试图把数学建立在他们所描述的结构的基础之上。他们成功地挽救了上述学科的一部分，但是他们的结构过于复杂。就连魏尔也抱怨说，这些证明笨拙得令人难以忍受。另外，直觉主义者还重构了代数

和几何的基础部分。

然而，重构工作进展缓慢。因此，希尔伯特在他的《数学的基础》(1927 年)一文中说，“与现代数学的突飞猛进相比，直觉主义者所取得的少而孤立的结论既不完善也不相互关联，这些可怜的残余算得了什么。”当然，1927 年时，直觉主义者在按他们的标准重构经典数学方面，还没有取得太大的进展，但来自他们的哲学对手的挑衅激怒了他们。从那时起，越来越多的直觉主义者着手重建基础的工作。不幸的是，与逻辑学派一样，他们在什么是可接受的基础这一问题上也产生了分歧。有的认为应剔除所有广义集合论公理化的观点，他们限定自己只使用可以被有效定义或构造的概念。有的则是构造主义者，他们并不那么极端，他们不但不怀疑经典逻辑，而且还利用它所有的观点。有的则承认一个数学客体的类，并以此坚持构造过程。这样一来，就有许多人承认至少有一个实数类(不能扩展到整个实数连续统)；而另一些人则只接受整数，他们只愿意考虑诸如那些可计算的其他数和函数的概念，而那些被认为是可计算的东西也不尽相同。因此，一个数如果可被某些由可接受的数构成的集合越来越精确地逼近，就好像一个一般无理数能被一个有限小数越来越精确地逼近，那么它就是可计算的。

不幸的是，构造性的定义绝不能说是清晰明确的。我们来考虑下述关于数 N 的定义：

$$N=1+\frac{(-1)^p}{10^p}$$

假设 $p=3$，则 $N=1-0.001$ 或 0.999。设 $p=2$，则 $N=1.01$。现在我们把 p 定义成 π 的十进制展开式中出现序列 123456789 后的第一位。若不存在这样的 p，我们定义 N 为 1；若存在这样的 p 并且为一偶数，则 $N=1.000\cdots\cdots$直到第 p 个位置，N 的小数部分在这一位上是 1。若 p 为奇数，则 $N=0.999\cdots\cdots$直到第 p 位。然而我们并不知道这样定义的 p 是否存在。若不存在，则 $N=1$，若存在，但并不在 π 的十进制展开式的头一千位内，则我们不能写出

N 的值。然而 N 是被定义了的，甚至定义到了任意精度位上，N 还是构造性定义的吗？

当然，使用了选择公理或连续统假设的存在性证明不是构造性的，因此不仅对直觉主义者，甚至对许多非直觉主义的数学家来说都是不可接受的。

虽然在构造主义者之间存在着分歧，但还是可以说，他们重建了经典数学中的很大一部分。有些重建的理论所肯定的东西不如在经典理论中的多，对于这个问题，直觉主义者的回答是：尽管经典分析是有用的，但它的数学真理性却比较少。总之，他们的进展受到了很大的限制，而且，将他们的工作扩展到先前已接受的数学中去的前景并不美妙。由于进展缓慢，甚至连布尔巴基学派的数学家(关于他们，我们将在后文中讲述)也在 1960 年说："毫无疑问，直觉学派注定将会只作为一个历史奇观而被缅怀。"对直觉主义的批评可以引用诗人 S. 霍芬森的一段诗：

一点一点的，我们从事实中
抽去谬误，也抽去信念，
仅靠残留的真实的幻影，
我们忍饥挨饿，勉强为生。

然而，对直觉主义者来说，如果建立一个合理的基础必须牺牲经典数学的一部分，甚至是牺牲康托尔的超限数"天堂"的话，这个代价也还是不算太高的。

尽管直觉主义的反对者对直觉主义这种数学哲学的驳斥过于傲慢和武断，但对许多持有同情心的人们的批评则必须严肃对待。有这样一种批评指出，直觉主义者努力重建的，与其原则相一致的理论并不能由人类的直觉提出，也很难用人类的直觉来保证。这些理论已被数学家所用过的所有方法、所有类型的推理、猜想、从特殊情况中所得到的归纳，以及那些来源不明的瞬间灵感所得出。因此，在实践中，像所有的数学家一样，直觉主义者实际上依赖的是常规的建立方法，甚至是古典逻辑，尽管直觉主义者寻求的是一种与他们自己的原则相一致的重建理论的证据。直觉主义者

也许会这样回答：尽管须要用到一些发现的常规方法，它们的结论还是肯定能被人类的直觉所接受的。然而，在不否定直觉主义中其他思想的重要性的情况下，事实仍然是：许多连直觉主义者都接受的理论对直觉来说也是如此的微妙和不可思议，很难相信人的头脑能直接认识到它们的真实性。

创造的常规方式和数学的理想化、抽象化的常规方式是基本的，这一论断由F. 克莱因和帕斯更推进了一步。直觉能发现一种连续却无处可导的函数或一条填满正方形的曲线（皮亚诺曲线）吗？这种创造，即使可由直觉提出，也必须经过理想化和抽象化的提炼。克莱因说简单幼稚的直觉是不准确的，而经过提炼后的直觉却又根本不是真正的直觉，它来自于建立在公理基础上的逻辑发展。我们将最终依赖于从公理出发的逻辑推理。对此，布劳维说，一个公理系统必须用解释或模型的方式来证明相容性（见第八章），而这种解释或模型本身也必须是相容的。他尖锐地问道，我们总能找到这样的解释，而且不依赖于直觉基础而接受其相容性吗？

魏尔也对传统的创造方式和证明更为有力这一断言提出了挑战。在他的《思维与自然》（1934年）中，他说："那种指望着揭示一个比展现在直觉面前的自然更为深入的自然的想法是个不太可能实现的梦想。"

一些直觉主义者的对手们也赞同数学是一种人类的创造。但他们认为对错是客观决定的，而直觉主义者依靠的却是难免出错的人类头脑的自明。在希尔伯特和伯奈斯（Paul Bernays）关于数学基础问题的著作第一版的论述中，我们看到了直觉主义哲学致命的弱点。如果正确性意味着人类头脑的自明，那么我们可能依赖什么样的概念和推理呢？而对所有人类都具有客观有效性的真理又在哪里呢？

另一个对直觉主义的批评指出直觉主义与数学在自然中的应用无关。直觉主义没有把数学和感知联系起来。布劳维承认直觉主义没有实用价值，实际上，布劳维否定人类对自然的支配。不

管批评是什么，魏尔在 1951 年说，“我想每个人都必须接受布劳维的批评，他所想要坚持的是这样一个信念：数学命题陈述的是纯粹的真理，基于显明的真理。”

直觉主义学说引起了一个相关的问题。正如我们所知，他们坚持认为正确的，可接受的思想能被并且已被人类的头脑所领悟。这些思想并非起源于语言形式，实际上，语言只是传输这种思想的一种不完善的工具。这个已被详细讨论过的问题就是思想是否能脱离语言而独立存在。一方面，存在着这样一种观点，可用圣约翰在《福音》中所说：“打世界创立之初，就存在着语言。”尽管圣约翰并没有什么数学头脑，但他的论述却与希腊哲学观和一些现代心理学家的观点不谋而合；另一方面，见克莱则坚决认为语言是思想的累赘。

欧拉在给普鲁士王国腓特烈一世的侄女安霍-德骚（Anhalt－Dessau）公主的信中（发表于 1768－1772 年间），讨论了这个问题：

> 无论一个人运用抽象的能力有多么强，同时还在头脑中融入了一般的思想，但如果没有书面的或口头的语言作为帮助，他就不可能取得重大的进展。这两种方式都包含了大量的词汇，它们只是与我们思想相对应的一些特定的符号。它们的含义是由习俗或由群居在一起的人们的默认所决定的。
>
> 从这里可以看出，对人类来说，语言唯一的目的就是在人类之间相互传递他们的感知。一个孤立的人没有它也可以过得很自在，但我们只要稍加思考就足以明白：人类确实需要语言。这是与其他人沟通的需要，同时也是培养、磨炼他们自己的思想的需要。

阿达马在《数学领域中的创造心理》（1945 年）中考查了这样一个问题：数学家们是如何思考的。他发现在创造过程中，所有的数学家实际上都避免使用准确的语言，他们用的是含糊的、可见或可触摸到的印象。爱因斯坦在一封信中（后被载入阿达马的

书中）描述了这种思维模式：

> 写下来的词句或说出来的语言在我的思维机制里不起任何作用。……那些似乎可用来作为思维元素的心理实体，是一些能够“随意地”使之再现并且结合起来的符号和多少有点清晰的印象。……对我来说，上述那些元素是视觉性的，也有一些是肌肉型的。只有在第二阶段，才有必要费神地去寻求惯用的词或其他记号。……

当然，形象化在创造行为中起了主要作用，将欧几里得平面划分为两部分的无限长直线就来自于形象。这样，问题就可以归纳为，大脑对一个事实（不管是怎样得到的）的把握是否已达到如此确定的程度（就如同直觉主义者所主张的那样），以致于使用准确语言和逻辑证明来表达变得不是那么重要了呢？

作为一种能促进与形式逻辑主义者交流的友好表示，海丁（Arend Heyding）这位继布劳维后的直觉主义的主要倡导者，在1930年发表的一篇论文中，提出了直觉主义命题逻辑的形式法则。其中只包括了经典形式逻辑的一部分。例如，海丁允许 p 为真的命题蕴涵着 p 为假为假的命题。但是如果 p 为假为假，却不能导出 p 为真，因为关于 p 的断言是不可构造的。排中律—— p 或非 p 必为真——这里没有用到。但是如果命题 p 蕴涵着命题 q，那么 q 的否命题则蕴涵着 p 为假。直觉主义者并不认为这种形式化是基本的，它只是对思想的不完全表达。此外，形式化并非海丁一家所独有，直觉主义者在可接受的逻辑原则问题上各有分歧。

尽管直觉主义者对数学添加了很多限制，尽管还存在着来自直觉主义哲学其他部分的批评，但直觉主义却带来了有益的影响。它首次严肃讨论了有关选择公理的问题并将其放到了显著的地位上。数学中的存在性意味着什么？它对于解释魏尔的理论，对于知道那个具有特殊性质却无法认识或计算的数的存在有什么好处吗？那种对排中律没有限制地、天真地扩展无疑需要重新考虑。直觉主义者最有价值的贡献也许就是他们在计算数或函数问题上所

坚持的主张，即在论证这些数及函数的存在时，仅证明不存在将会导致矛盾。要详细了解这些数就好像要与朋友住在一起而不是仅仅知道有个朋友住在这个世界的某个地方。

逻辑主义者与直觉主义者的对抗只是在围绕着建立数学的适当基础的纷争中的首次交锋。其他的竞争者也加入了这场纷争，我们暂且拭目以待。

第十一章 形式主义与集合论公理化基础

与现代数学的浩瀚大海相比，那点可怜的残余算什么。直觉主义者所得到的是一些不完整的、没有联系的孤立的结论。

——大卫·希尔伯特

出现于本世纪头10年，在数学基础上观点完全相反的逻辑主义与直觉主义哲学，只是这场大纷争中首先登场的两大派系。关于数学基础思想的第三大派系是由大卫·希尔伯特领导并风行一时的形式主义派，而第四大派系集合论公理化派则是由策梅罗创建的。

希尔伯特在1900年国际数学家大会的发言（见第八章）中，强调了证明数学相容性的重要。他还提出一种实数的良序方法，正如我们从策梅罗的工作中所知道的，良序原理等价于选择公理。最后，希尔伯特还建议数学家们致力于证明连续统假设的工作，这种假设声称在$\aleph_0$和c之间不存在别的超限数。早在令人困扰的悖论和关于选择公理的争论产生以前，希尔伯特就预见了解决所有

这些问题的必要性。

在1904年第三届国际数学家大会上，希尔伯特本人提出了他解决数学基础问题方法的纲要，其中包括证明相容性的方法。但是他在一段时间内并没有做更多实质性的工作。在以后的15年中，逻辑主义者和直觉主义者广泛地发展了他们的学说，但希尔伯特委婉地指出，他对他们关于数学基础问题的解答并不满意。

希尔伯特相当冷静地驳回了逻辑主义思想。正如他在1904年的演说和论文中所讲的，他主要的反对理由是，在逻辑漫长而复杂的发展过程中实际上已涉及到整数，尽管没有这样称呼它们。因此在逻辑的基础上建立整数的概念实质上就是循环论证。他还批评了以集合的属性来确定集合的方法：这样就必须通过层次和层次论来区分命题和命题函数，而层次论需要用到引起争议的约化公理。他很赞成罗素和怀特海的关于无穷集合应被包括进入的观点，但这须用到无限公理，希尔伯特希望别人能证明这不是逻辑公理。

在另一方面，直觉主义者的哲学也引起了希尔伯特的警觉，因为他们排除的不仅仅是无穷集合，而且还有建立在纯存在证明基础上的大部分分析。希尔伯特强烈地抨击了他们的哲学。1922年，他说直觉主义者“想要使数学瓦解和变形”。在1927年的一篇论文中，他抗议说：“禁止数学家用排中律就像禁止天文学家用望远镜或拳师用拳一样。否定用排中律所得到的存在性定理就相当于全部放弃了数学的科学性。”

魏尔在1927年谈到希尔伯特对直觉主义的看法时，说道：“在直觉主义者的观点中，仅有一部分，也许是仅有可怜的一小部分经典数学理论是站得住脚的，这是个痛苦且不可否认的事实，希尔伯特是不能忍受这种残缺的。”

在反对逻辑主义和直觉主义的过程中，希尔伯特坚持认为两者都不能证明相容性。在1927年的论文中，他宣称：

> 为了奠定数学的基础，我们不需要克朗涅克的上帝，也不需要彭加勒的与数学归纳原理相应的特

殊理解力（彭加勒曾说过利用数学归纳法无法证明系统的相容性）或布劳维的基本直觉，最后，我们也不需要罗素和怀特海的无限性、归约性以及完备性公理。这些公理是切实的、基本的命题，但是不能通过相容性的证明来建立。

20世纪80年代时，希尔伯特确定了他自己的数学基础方法，并在余生致力于此项工作。在他20年代至30年代初发表的论文中，1925年的论文是最主要的一篇。其中写道："对于无穷量，我的理论的目的是一次性彻底地解决数学方法中的确定性问题。"

他的理论的首要点就是既然逻辑的发展确实与数学思想有关，既然经典数学被留存下来，一些超逻辑公理（例如无穷公理）总要被引入，那么正确的数学方法必须包括既有逻辑又有数学的概念和公理。此外，逻辑必须研究那些包含某些超逻辑的具体概念的事物，例如整数，它们早在逻辑开始发展前就存在于直观中了。

希尔伯特所设想的逻辑公理与罗素的公理在本质上没有什么区别，尽管希尔伯特假设的更多一些，因为他不想参与为逻辑建立一种理论基础。但是，希尔伯特说，因为不能仅仅从逻辑中推导出数学——数学不是一种逻辑的结果而是一种自然存在的法则——每一个分支都必须含有包括逻辑和数学在内的适当的公理。此外，对待数学的最可靠的方法就是不把它当作实际知识而是当作一种形式上的法则，也就是说，当作一种抽象的、象征性的、与含义无关的法则（尽管，非正式地说，它的含义及它与现实的联系已融入其中）。根据逻辑学原理，演绎法可归结为对符号的操作。

因此，为了避免语言上的含义不清和对直觉知识的无意识应用（这也是产生一些悖论的原因），也为了清除其他的悖论以达到证明的准确性和客观性，希尔伯特决定对所有逻辑和数学的叙述用符号形式来表达。这些符号，尽管它们可以表达直观上的意义的感知，但不能在他所提出的形式数学中找到解释。希尔伯特希望包括一些甚至可以表示无限集合的符号，但是它们没有什么直

观上的意义。这些理想的元素，如希尔伯特所称，是建立所有的数学所必需的，所以它们的引入是合理的，尽管希尔伯特相信在现实世界中仅有有限个事物存在，事物又是由有限个元素所组成的。

希尔伯特的观点可以用一个比拟来理解。无理数作为数字是没有直观上的意义的。即使我们能引入一些尺寸为无理数的长度，这些长度本身并不能为无理数提供任何直观上的含义。但是无理数作为一种理想的元素即使是在初等数学中也是必不可少的，这也就是为什么数学家们能在 1870 年以前没有任何逻辑基础的情况下用到它们的原因。希尔伯特认为复数，也就是那些与 $\sqrt{-1}$ 有关的数，它们在实数中没有直接相对应的数，但是对它们可以建立可行的普遍性的定理：例如每个 n 阶多项式方程正好有 n 个根，以及一整套被证明甚至在物理研究中都具有广泛应用的复变量理论。不管符号所代表的是否是直觉上有意义的事物，所有概念和运算中的符号本身都是无意义的。对于数学基础来说，数学思想的要素就是符号和由符号组合或串联而成的命题。这样形式主义者就要花相当大的代价：处理一些毫无意义的符号，去探求确定性。

幸运的是，这些逻辑符号体系在 19 世纪后期、20 世纪初期就已得到了发展（见第八章），所以希尔伯特得到了他所需要的现成的符号体系。例如记号～表示“非”，· 表示“与”，∨ 表示“或”，→表示“蕴涵”，∃表示“存在”，这些都是没有定义的或基本的概念。当然，对于数学来说符号体系早已存在。

希尔伯特所选择的逻辑公理意欲对亚里士多德逻辑的所有原理产生影响，人们很难对这些公理的可接受性产生怀疑。例如：有 X、Y、Z 三个命题，其中一条公理说 X 蕴涵 $X \vee Y$，按字面解释就是，如果 X 为真，那么 X 或 Y 为真。另外一条公理按字面解释为：如果 X 蕴涵 Y，则 Z 或 X 蕴涵 Z 或 Y。一个基本公理就是蕴涵的规则或是推理的规则。公理认为，如果公式 A 为真，并且公式 A 蕴涵公式 B，则公式 B 也为真。这个逻辑法则在亚里士多德

逻辑中被称为肯定式。希尔伯特还希望用到排中律，他还引入了一种用符号形式表达排中律的技术工具。在表述选择公理（自然它是一个数学公理）时也用到了这种技术工具。希尔伯特希望，不明确使用“一切”这个词就可以避免任何悖论。

在研究关于整数的数学分支中，根据希尔伯特的方案，存在着整数公理。举例说明：有一条定理 $a=b$ 蕴涵 $a'=b'$，是说如果两个整数 a 和 b 相等，那么它们的后继数（即下一个整数）也相等。另外，还存在着数学归纳公理。通常这些公理至少与自然现象的经验或已存在的数学知识有关。

如果用一个形式系统表示集合理论，那么，它必须包含说明哪一类集合被形式化的公理（用符号形式表达），这样，公理就可以允许这类集合：两个集合的和与一个给定集合的所有子集组成的集合形式化。

对于所有的用公式和符号组合表达的逻辑和数学公理，希尔伯特准备用客观的证明来说明他的想法。它包括以下过程：肯定某一个公式；肯定这个公式蕴涵另一公式；肯定第二个公式。一系列这样的步骤，其中所肯定的公式或蕴涵关系都是前面的公理或结论，这就构成了一个定理的证明。另外，用一个符号去代替另一个或一组符号也是一种允许的运算。这样，把逻辑公理用到以前建立的公式或公理的符号操作上去，就可以推导出公式。

一个公式为真，它必须且只须是这样一串公式中的最后一个，其中的每一个公式，或者是形式系统中的一条公理，或者是由归纳法则所导出的公式。每个人都可以验证，一个给定的公式是否可以通过一串适当的推导得到，因为证明在本质上就是对一些符号的机械操作。这样，按照形式主义的观点，证据和严密性就是确定的、客观的。

于是对于形式主义者来说，数学本身就是一堆形式系统，各自建立自己的逻辑，同时建立自己的数学；各有各自的概念，各自的公理，各自的推导定理的法则，以及各自的定理。把这些演绎系统中的每一个发展起来，就是数学的任务。

这些就是希尔伯特关于数学结构的方案。但是能从没有矛盾的公理中得到结论吗？由于先前关于数学主要分支的相容性证明是在假设算术相容的基础上给出的——确实，希尔伯特本人已经指出欧几里得几何相容性可以归结为算术相容性——所以后者的相容性就变成了关键性问题。正如希尔伯特提出的，“在几何学和物理理论中，相容性的证明是通过把它归结为算术相容性来完成的。这种方法很明显不适用于对算术本身的证明。”那时希尔伯特所寻求的是与相对相容性相反的绝对证明。这也是他集中精力要解决的问题。他说在这一点上我们今后不能像在20世纪初那样冒令人不快的意外之险。

现在，相容性观察不到了。一个人不能预见到公理中的所有内涵。然而，希尔伯特像几乎所有关心数学基础的数学家那样，根据一个假命题蕴涵着任一命题来运用实质蕴涵的概念（见第八章）。如果存在着一个矛盾，那么根据矛盾律，两个命题中必有一个为假命题，并且如果存在一个假命题，它必然蕴涵 1＝0。因此，想要证明相容性只须证明我们永远不会得出 1＝0 这个形式的语句。这样，如希尔伯特在1925年的文章中所说，“在我们曾经历过的两次悖论中，头一次是微积分悖论，第二次是集合论悖论，我们不会再经历第三次，而且永远也不会。”

希尔伯特和他的学生阿克曼（Wilhelm Ackermann）、伯奈斯（Paul Bernays）和冯·诺伊曼在1920到1930年间逐步开展了所谓的希尔伯特证明论或元数学，这是建立任何形式系统的相容性的一种方法。元数学的基本思想可以用一个比喻来理解：一个人想要研究日语的有效性和综合性，如果用日语研究就会由于语言的限制而对研究不利，但如果英语是一种有效的语言，那么他就可以利用英语来研究日语。

在元数学中，希尔伯特提议用一种特殊的无任何异议的逻辑，这些逻辑原理应该很明显为真，任何人都能接受它们。事实上，它们很接近于直觉主义原理。不使用那些有争议的推论——诸如用矛盾去证明存在，超限归纳，实无穷集，非断言性定义以及选择

公理。存在性证明必须是构造性的。因为一个形式系统可以是无限的，那么元数学必须容纳这些概念和问题，它们牵涉到至少是潜无穷的系统，但是不能涉及到公式中无穷多个结构性质和无穷多个公式操作。可以考虑这样的公式，其中符号只代表实无穷集合，但是它们仅仅是公式中的符号而已。自然数的数学归纳法是可承认的，这是由于它证明的是到任一有限数 n 的命题，而无须再去证明在整个自然数无限集合中的命题。

希尔伯特把元数学证明的概念和方法称作有限性（finitary），他对有限性的含义有些含混不清。在1925年的论文中，他举了如下例子，“如果 p 是一个质数，那么总存在一个质数大于 p”这个论述是非有限性的，因为它是一个关于所有大于 p 的整数的论述。而论述“如果 p 是一个质数，那么在 p 和 $p!+1$ 之间总存在一个质数”是有限性的，因为对于任何一个质数 p，我们所要检验的是在 p 和 $p!+1$ 之间的有限数中是否存在着一个质数。

在希尔伯特与伯奈斯于1934年合作出版的书中，他是这样描述有限性的：

> 我们将经常用“有限性”这个词来表示问题中的论述、论断或定义限制在完全可构造的事物、完全可行的过程范围内，并在可具体检查的领域内执行。

毫无疑问，元数学将利用直觉语言和必须借助于符号表示的非正式语言。

在国际数学家大会（1928年）上，希尔伯特在谈到他的元数学方案时，非常自信地断言：“利用这种新的数学基础——人们完全可以称之为证明理论，我将可以解决世界上所有的基础性问题。”他尤其相信能够解决相容性问题和完备性问题，也就是说，所有有意义的论述将会被证实或推翻。那样也就不存在悬而未决的命题了。

可以预料，形式主义者的方案将会遭到他的对手们的非难。在《数学原理》（1937年）第二版中，罗素说形式主义者所使用的算

术公理不能准确地限制符号 0，1，2……的含义。我们也同样可以按我们直觉上的愿望从 100，101，102……开始，因此“有 12 个门徒”的论断在形式主义中就没有意义了，“形式主义者就像一个只专注于如何使他的表看起来漂亮的制表匠，他忘记了表的报时作用，因而也就忽略了怎样使表走得更准。”数的逻辑定义明了地与现实世界联系起来，而形式主义理论却做不到这一点。

罗素还攻击了形式主义的存在性概念。希尔伯特已接受了无穷集合和其他理想元素，并且认为数学的任何一个分支的公理，其中包括排中律和矛盾律，如果不能导致矛盾，那么满足公理的实体就肯定存在。罗素认为这种存在性的见解是形而上学的。此外，罗素说，可以想象出公理的无矛盾系统的多样性是没有限制的。他接着说，我们只对可应用于经验材料的系统感兴趣。

罗素的非难让人想起了“五十步笑百步”的成语，他在 1937 年时早已忘记了他曾在 1901 年写过的话：“数学可定义为这样一门学科，在其中我们永远不知道我们谈论的是什么，也不知道我们所说的是否正确。”

形式主义方案对于直觉主义者来说是不能接受的。除了他们在关于无穷和排中律上的根本差异外，直觉主义者继续强调了他们是依靠数学的意义来决定其正确与否的，而形式主义者（和逻辑主义者）却是与理想的或是无意义的超自然世界打交道的。布劳维在 1908 年就已经表示，在经典分析的基础理论中，其中包括波察诺-维尔斯特拉斯定理（一个相当专业化的定理：一个有界无限集合至少有一个极限点），逻辑与含义有明显的矛盾。当排中律应用于任一理论超出了有限可证明时，布劳维说，我们必须在我们关于正整数的先验真理与排中律的随意使用之间作出选择。随意使用亚里士多德逻辑会导致形式上有效而实质上无意义的论断。经典数学通过放弃许多逻辑结构中的含义而放弃了实在。

布劳维的批评使许多人认识到以前错误地认为毫无疑义的信仰是有用的，这种信仰就是：任何重大的数学理论总是某种根本性的客观实在的真实表述。这些理论恐怕只是实际上真实的事物

和现象的理想化。但是，尤其是在19世纪，经典分析中的许多内容除了在逻辑上令直觉主义者不满外，已经远远超出了直觉上的意义。接受布劳维的观点就是以经典数学缺乏直觉上的意义为理由来放弃相当一部分经典数学。

直觉主义者现在说，即使希尔伯特的形式化数学的相容性得到了证明，这种理论即这种形式化的数学也是没有意义的。魏尔抱怨说希尔伯特是通过"一种彻底的重新解释"来"拯救"经典数学的，也就是把它形式化了，而实际上是抽取了它的含义。"这样就把它在原理上从直觉系统转移，而形成一个根据固定规则进行的公式游戏。""希尔伯特的数学也许是一种美妙的公式游戏，甚至比下棋更有趣。既然它的公式并不具有公认的可借以表示直觉真理的实在意义，那么它与认识又有什么关系呢？"为了维护形式主义哲学，我们必须指出只是为了证明相容性、完备性和其他性质才把数学简化成毫无意义的公式。数学作为一个整体，即使是形式主义者也不认为它仅是一种游戏，他们认为它是一种客观的科学。

与罗素一样，直觉主义者反对形式主义的存在性概念。希尔伯特坚持认为任何实体的存在性都可以通过它被引入时所在的数学分支的相容性所保证。这个相容性概念对于直觉主义者来说是不能接受的。相容性不能保证纯存在定理的真实性。早在两百多年以前，这种证明就由康德写在他的《纯粹理性批判》一书中："对于取代概念的逻辑可能性（即这种概念不能自相矛盾）和对于事物的先验可能性（即客体须与概念相符），它们只能欺骗和取悦于头脑简单的人。"

20世纪30年代，形式主义者与直觉主义者之间发生了激烈的舌战。1923年，布劳维指责了形式主义者。他说，"尽管公理化、形式化的处理可以避免矛盾，但也因此不会得到有数学价值的东西。一种不正确的理论，即使它没能被任何反驳它的矛盾所驳倒，但它仍是不正确的；这就像一种犯罪行为不管是否有法庭阻止它，它都是犯罪一样。"1921年他在阿姆斯特丹大学的演讲中又一

次讽刺说："对于在哪里能找到数学严密性的问题，这两派提供了不同的答案。直觉主义者说在人类的理智中，而形式主义者说在纸上。"

希尔伯特也反过来指责布劳维和魏尔，说他们想要丢弃每件不适合他们的东西，还专横地颁布了一道禁令。在他1925年的论文中，他称直觉主义是对科学的背叛。但是，正如魏尔指出的，在他的元数学中，他却把他的原则局限在基本直觉原则之内。

还有这样批判元数学原则的：元数学原则应该是被所有人接受的，但却只有形式主义者选择了它们。为什么他们的直觉就可以作为检验的标准？为什么直觉主义者不能探讨所有的数学？在元数学中，最终检验一个方法是否可行是看其是否具有说服力，但是这种说服力又是对谁而言呢？

尽管形式主义者不可能应付所有的指责，但是在1930年，他们有了一个对他们极为有力的论据。罗素及其拥趸同意逻辑公理不是真理，所以不能保证相容性。而直觉主义者只有在他们的直觉能保证相容性时才能坚持其正确性。但是，在另一方面，形式主义者对于建立相容性却有一个深思熟虑的程序。利用简单系统获得的成功使他们确信可以获得算术以至于全部数学相容性的成功。现在，我们暂且将他们搁置一边，来看一看另外一个研究数学基础方法的对手。

集合论公理化派的成员在开始时并没有形成他们独特的哲学，但是他们逐渐获得了支持，有了明确的方案。在今天，我们可以肯定地说这个派别在数学家中所拥有的支持者是与我们前面介绍的三个派别势均力敌的。

我们可以把集合论公理化的起源追溯到戴德金和康托尔的工作中。尽管他们主要关心的是无穷集合问题，并且也都着手于在集合概念的基础上建立一种普通的整数（自然数）。当然，一旦整数建立了，也就能推导出全部数学了（见第八章）。

当康托尔的集合论的矛盾，就是那些涉及到集合的最大基数和最大序数以及罗素和理查德关于集合的矛盾出现时，一些数学

家相信这些悖论的产生是由于滥用集合所致。康托尔大胆地引入了一些激进的观点，但他表达得相当不明确。他在1884年、1887年、1895年对集合论分别给出了各种文字上的定义。他的集合论的概念实质上是：我们的直观或思想中明确的、可分辨的物体的总体。换句话说，对于每个实体X，我们只要知道X是否属于这个集合，这个集合就可以确定了。这些概念都是含糊不清的，康托尔的集合论的整个表示形式在今天通常被说成是幼稚的。因此集合论的公理化思想，做为一种经仔细选择的公理化基础，可以排除集合论中的悖论，正如几何和数系中的公理化可以在那些领域里解决逻辑问题一样。

尽管集合论包含在数学的逻辑方法中，集合论公理化主义者更希望直接通过公理来研究它。策梅罗在1908年的一篇论文中着手进行了集合论的公理化，他也相信悖论起因于康托尔对集合的概念没有加以限制。因此，策梅罗希望清晰明确的公理能够澄清集合的含义和集合所应具有的属性，尤其是他想要设法限制集合的大小。他没有什么哲学根据，只是力图避免矛盾。他的公理系统包含未加定义的集合的基本概念，以及一个集合被另一个集合所包含的关系。所有这些加上已定义的概念就可以满足公理中的陈述，只有公理所提供的集合的性质才能使用。在公理中，无穷集的存在性，以及像集合的并与子集的形成这一类的运算也由公理给出。策梅罗也用到了选择公理。

策梅罗的公理系统在1922年由弗兰克尔（Abraham A. Fraenkel）改进。策梅罗没有区分集合的属性和集合本身，它们被当作同义语使用。弗兰克尔在1922年找出了它们之间的区别。这套被集合论公理化者最通常使用的公理系统叫做策梅罗-弗兰克尔系统。他们俩分别预测到了精致的、严密的数学逻辑的可行性，却没有详细说明逻辑的原理。他们认为这些都是在数学范围之外的，并且确信他们可以像1900年以前的数学家使用逻辑一样来使用这些逻辑原理。

让我们权且以文字形式来表示策梅罗-弗兰克尔集合论中的

几条公理。

1. 如果两个集合含有同样的元素，那么它们是相等的（直观上讲，这确定了集合的概念）。
2. 存在着空集。
3. 如果 x 和 y 是集合，那么无序对 $\{x, y\}$ 也是集合。
4. 一组集合的并也是集合。
5. 存在着无穷集（这个公理允许超限基数，这是关键的一条，因为它超越了经验）。
6. 任何可用理论的语言形式化的属性都可以用来定义一个集合。
7. 对任一集合，都可以作出其幂集；即任一给定集合中的所有子集的全体也是一个集合（这个过程可以无限次重复，即我们可以把任一给定集合中所有子集的集合看成一个新的集合；这个集合的幂集就是一个新的集合）。
8. 选择公理。
9. x 不属于 x。

对于这些公理，特别值得注意的是它们不允许考虑全包容集合，因而大概可以避免悖论。但是它们含有足够的经典分析所需的集合论的全部性质，建立在集合论上的自然数的发展可以很容易地实现了。康托尔在 1885 年就宣称纯数学可以归结为集合理论，并且事实上怀特海和罗素已经这样做了，尽管他们研究集合的方法要复杂得多。从关于整数的数学中可以得出所有的数学，其中包括几何学，只要这种几何学是建立在解析几何基础上的。因此集合论可以作为所有数学的基础。*

---

* 后来哥德尔（1940 年）和伯奈斯（1937 年）改进了策梅罗-弗兰克尔系统，用以区别集合与类。他们还简化了冯·诺伊曼于 1925 年的表述。集合可以属于其他集合、所有的集合都是类，但并不是所有类都是集合。类不能属于更大的类，类与集合之间的区别意味着不允许有奇形怪状的集簇属于其他的类。这样，康托尔的不相容集合就可以被剔除。策梅罗-弗兰克尔系统中的任何一个定理也是哥德尔-伯奈斯系统中的一个定理，反之亦然。实际上，在集合论的公理系统中有很多的变体。　——原注

反复强调的是，避免矛盾的希望寄托于集合论的公理化，即对所容许的集合类型加以限制，同时又使它们有足够的性质作为分析的基础。到目前为止还没有人从集合论公理理论中得出悖论，策梅罗宣称没有任何人会得出。后来的集合论公理化主义者也毫无疑问地确认了这一点，因为策梅罗和弗兰克尔非常严格地建立了集合体系，这种体系避免了在早期研究集合及其性质的工作中的不明确性。然而集合论公理化的相容性还是没有得到证明，而集合论公理化主义者对此一直未加注意。对于这个悬而未决的相容性问题，彭加勒用他惯用的嘲讽语气评论道："为了防备狼，羊群已用篱笆圈起来了，但却不知道在圈里有没有狼。"

像其他派系一样，集合论公理化主义者受到了众多的批评。选择公理的使用受到了很多人的攻击。早在本世纪头10年，逻辑本身和它与数学的关系就在研究之中了，而集合论公理化主义者却宁愿忽视这些逻辑原则。当然，他们对相容性的盲目自信被一些人视为幼稚，与康托尔发现麻烦前一样地幼稚（见第九章）。还有一种批评认为集合论的公理相当武断和做作，它们是为了防备悖论而设计出来的，但其中一些却是不自然的或是建立在直觉基础上的。既然连集合论公理化主义者都推测出了逻辑原理，那么为什么不能从算术本身开始着手呢？

尽管如此，策梅罗-弗兰克尔的集合论公理至今仍被一些数学家当作建立所有数学的理想基础。它是建立分析和几何的最普遍、最基本的原理。实际上，正像各个头领在发展并促进他们自己的哲学的同时也使其他的数学方法赢得了众多的支持者一样，集合论公理化方法也是如此。一些逻辑学家，例如奎因就满足于集合论。一批以布尔巴基为集体笔名的卓越的德高望重的数学家在1936年详细地证明了大多数数学家所相信的事实，那就是，若接受策梅罗-弗兰克尔的，尤其是经伯奈斯和哥德尔修改过的集合论公理以及一些逻辑原则，那么就可以在其基础上建立所有数学。但是对于布尔巴基派来说，逻辑是从属于数学公理的，对于数学是什么或数学家做些什么它不起支配作用。

布尔巴基派在《符号逻辑杂志》(1949年)的一篇文章中表明了他们对逻辑的看法："换句话说，逻辑，就我们数学家而言，是我们使用的语言的语法，而语言早在语法建立前就已经存在了。"数学将来的发展可能要求对逻辑有所修改。这在引入无穷集合时就已经这样做了，我们将看到，在讨论非标准分析（见第十二章）时，我们还得这样做。这样，布尔巴基派就脱离了弗雷格、罗素、布劳维和希尔伯特。逻辑的修改利用的是选择公理和排中律，尽管它们是用希尔伯特的技术方法推导出来的。布尔巴基派不屑于研究相容性问题，他们说："我们仅仅意识到，当所有异议都被排除，并且推理的正确性没有疑义时，这些困难也就都被解决了。"矛盾在过去产生过并且已被解决了，将来也会是这样。"过去的25个世纪，数学家们一直在改正他们的错误，并且看到数学是更加丰富了而不是更加贫乏了；这就使他们有权力去展望未来。"布尔巴基派在他们对集合论公理化方法的研究中出版了约30卷著作。

这样，到1930年，四种彼此独立的、截然不同的并且或多或少有些冲突的关于数学基础的方法都已亮相。并且可以毫不夸张地说，他们彼此的追随者也都处于对峙状态。一个人再也不能说一条数学定理是被正确地证实了，因为到1930年，他必须加上一句，即依照谁的标准它被认为是正确的。除了直觉主义者认为的人的直觉能保证相容性外，数学的相容性，这个激发了新方法的重要问题，根本就没有得到解决。

数学在19世纪尽管没有在逻辑发展中获得成功，仍不失为一种完美的科学，而且是通过可靠的、毫无疑问的推理方法建立其结论的科学，它拥有的不仅是可靠的理论，而且是关于我们宇宙的真理，像一些人所认为的，是任何可能的宇宙的真理。但现在，数学不仅失去了其自诩的真理性，而且在各个关于数学基础的派系及关于正确的推理原则的断言的矛盾冲突中被玷污了。人类理性的自豪受到了严峻的考验。

数学家贝尔(Eric T. Bell)在1930年这样描述了当时的状况：

经验告诉大多数数学家，那些对于上一代数学

> 家来讲稳固的、令人满意的东西意味着是下一代用更可靠的探究方法破旧立新、拨乱反正的好机会。……所谓建立在数学基础上的合理的共识，在任何意义上似乎都是不存在的。

将来会怎么样？正像我们将要看到的，将来会带来许多更严重的问题。

第十二章 灾 难

那无边无际的苦难啊，
像一口鼎沸的大锅，
不惮辛苦不惮烦，
要把一切都化成羹汤。

——莎士比亚《麦克佩斯》

回顾以往，1930年时数学基础的状况可说是差强人意。已知的悖论已经被 解决，但是几个学派为此使用了特定的方法。诚然，对于什么是正确的数学这一问题已不再有一致的观点，然而每一位数学家都能采用他所喜欢的方法，进而依据该方法的原理发挥他的创造力。

但是，两个问题继续困扰着数学界。首先是建立数学的相容性，这恰恰是希尔伯特在1900年的巴黎讲演中提出的。虽然已知的悖论已经解决，可再次发现新悖论的危险依然存在。另一个问题被称为完备性，一般而言，完备性意味着任何数学分支的公理

对于判别涉及该分支的概念的所有有意义的断言的真伪性是充分的。

通俗地讲，完备性问题就是一个合理的欧氏几何的命题．例如三角形的三条高线交于一点，能否根据欧氏公理证明或证伪。更专业的，在超限数域中，连续统假设（见第九章）又是一个例子。完备性要求根据构成超限数理论基础的公理证明或证伪该假设。类似的，完备性要求根据数论中的公理证明或证伪哥德巴赫(Goldbach)猜想：任一偶数都是两个素数之和。事实上完备性问题包括了许多其他的命题，它们的求证向数学家们所发起的挑战已逾几十年甚至上百年。

对于相容性问题和完备性问题，几个学派采取了稍有不同的态度。罗素实际上放弃了他的逻辑方法中使用的逻辑公理是真理的信念，并且还承认了他的约化公理的人为属性（见第十章）。他的层次论避免了已知的悖论，而且罗素确信它能避免所有可能的悖论。然而，信心不能代替证明，罗素没能解决完备性问题。

尽管集合论公理化主义者自信他们的方法不会引起新的矛盾，但这一信念缺乏证据。同样，人们关注的主要不是完备性，直觉主义者对相容性问题漠不关心。他们认为被人类思维所承认的直觉具有自然而然的相容性，形式论的证明是不必要的，也与他们的哲学不相干。至于完备性，他们的看法是，人类的直觉是如此的强有力，以致于能判明绝大多数有意义的命题的真伪，即使有个别例外。

与之相反，由希尔伯特领导的形式主义学派并没有自鸣得意。在20世纪的最初几年，希尔伯特为解决相容性问题做了一些初步的工作。此后，在1920年，他的研究工作又一次回到了相容性和完备性问题。

在他的元数学中，希尔伯特找到了相容性的证明方法。对于完备性，在1925年的论文《论无限》中，他再次从根本上对1900年巴黎演讲所表明的观点进行了阐述："每一个明确的数学问题必须能被正确地解决"。在1925年的文章中，他进一步强调了这一

观点：

> 作为可以用来处理基本问题的方法的一个例子，我更乐于选取一切数学问题均可解决这样一种观点。我们都相信这一点，吸引我们去研究一个数学问题的最主要的原因是：在我们中间，常常听到这样的呼声，这里有一个数学问题，去找出它的答案！你能通过纯思维找到它，因为在数学中没有不可知！

在1928年波伦亚（意大利一城市）国际数学家大会的发言中，希尔伯特批评了以前的完备性证明，因为它们使用了元数学所不允许的逻辑原理。但他对自己系统的完备性则充满了信心："我们的推理并不具有任何秘密的技术，它只不过按照确切、清楚的规则进行而已，正是这样的规则保证了判断的绝对客观性。"他还说，每个数学家都相信，任何明确的数学问题必是可解的。在1930年的论文《自然知识和逻辑》中，他又这样说："我认为，孔德（Comte）没有能找到一个不可解的问题的真正原因是，本来就不存在不可解的问题。"

在1927年完成，1930年发表的《数学的基础》一文中，希尔伯特详细论述了他1905年的观点：使用他的元数学方法（证明论）来建立相容性和完备性。他断言：

> 我力求用这种建立数学基础的新方法达到一个有意义的目标，这种方法可以恰当地被称为证明论。我想把数学基础中所有的问题按照其现在提出的形式一劳永逸地解决，换言之，即把每一个数学命题都变成一个可以具体表达和严格推导的公式。经过这样治理的数学所推导出来的结果就会无懈可击，同时又能为整个科学描绘一幅合适的景象。我相信我能用证明论达到这一目标，尽管为此还要做大量工作。

显然，希尔伯特对于用证明论解决相容性和完备性问题是非常乐

观的。

截至1930年，人们已取得了若干关于完备性的结果。希尔伯特自己构造了一个只包括算术且具有一定人为色彩的系统，进而建立了它的相容性和完备性。不久其他人也得到了类似的局部结果，从而相对平凡的公理系统（例如命题演算）被证明是相容的，甚至是完备的。这些证明中的一部分是由希尔伯特的学生完成的。1930年，后来成为普林斯顿高等研究院教授的哥德尔证明了包括了命题和命题函数在内，一阶谓词演算的完备性*。所有这些成果使形式主义者倍受鼓舞。希尔伯特本人也确信，他的元数学和证明论将会成功地确立全部数学的相容性和完备性。

但就在第二年，哥德尔发表的另一篇论文却打开了潘多拉的盒子**。这篇题为《论数学原理中的形式不可判定命题及有关系统》(1931年）的论文包含了两个惊世骇俗的结论。其中对数学界尤具毁灭性的断言是：任何数学系统，只要其能包含整数的算术，其相容性就不可能通过几个基础学派（逻辑主义学派、形式主义学派、集合论公理化学派）采用的逻辑原理而建立。这一结果特别适用于形式主义学派，原因是希尔伯特已经仔细地限定了元数学的逻辑原理，能使用的逻辑工具之少甚至连直觉主义者都可以接受。无怪乎魏尔对此评论说：上帝是存在的，因为数学无疑是相容的；魔鬼也是存在的，因为我们不能证明这种相容性。

上述哥德尔的结果，是他的更为惊人的结果的一个推论，其称为哥德尔不完备性定理。它表明，如果一个形式理论T足以容纳数论并且无矛盾，则T必定是不完备的***。这意味着，有这样一个数论的有意义的语句S，使S和非S用这个理论都证明不了。

---

* 它还是相容的并且它的公理是独立的，这是由希尔伯特等人给出的。——原注

** 源出古希腊神话，比喻灾祸的来源。——译注

*** 这一结论同样适用于二阶谓词演算（见第十三章），不完备性并不会使可以证明的定理失效。——原注

因为S或非S总会有一个是真的，于是就有一个数论的语句S，它是真的，又是不可证明的，故其是不可判定的。尽管哥德尔并不十分清楚所涉及的公理系统的分类，但事实上他的定理不仅适用于罗素-怀特海系统、策梅罗-弗兰克尔系统、希尔伯特的数论公理化，而且事实上是一个被广泛接受的公理系统。很明显，相容性是以不完备性为代价的。我们可以通过那些超越前面所提到的形式系统的逻辑的证明，也就是推理的规则，来说明某些不可确定的语句。

就像人们猜测的，哥德尔并非很轻易地就得到了他那令人惊异的结果。他的方案是将数与逻辑主义者和形式主义者的数学方法中所用的符号及符号的顺序相联系。进而，对于任何构成证明的命题或者命 题集合，他同样确定一个哥德尔数与之对应。

更明确地讲，他的算术化在于为数学概念指派自然数：1 指派给 1，2 指派给等号，对希尔伯特的否定符号，指派 3，加号指派 5 等等。于是符号串“1＝1”就变成了整数符号 1，2，1。然而，哥德尔并不是将 1，2，1 指派给公式 1＝1，而是一个单一的，但却能表明各个指数的数。他选取了最小的三个素数 2、3、5，从而得到 $2^1\cdot3^2\cdot5^1=90$，所以对“1＝1”他指派了自然数 90。注意到 90 只能唯一地被分解为 $2^1\cdot3^2\cdot5^1$，因此我们能够再次得到符号 1，2，1。

对考察的系统中每一个公式，哥德尔都指定了一个数，而且对构成证明的整个公式序列，他同样指定了一个数，该数的各个指数正是每个公式的数值，尽管它们本身并不是素数，可与它们相对应的底数都取素数。例如，$2^{900}\cdot3^{90}$就是一个证明的哥德尔数，此证明由公式 900 和公式 90 构成。于是，从一个证明的哥德尔数出发，我们可以重新构造出构成这一证明的公式。

在此基础上，哥德尔进一步指出，他所考察的形式系统的元数学概念同样可以用数值表示出来。因此，元数学的任何断言都有指派给它的哥德尔数，一个元数学语句的数，与此同时，它还是某个算术语句的数值。这样，元数学也就被“映射”为算术了。

使用这些算术术语，哥德尔证明了如何构造一个算术论断G，用元数学语言来说就是，具有哥德尔数m的陈述不可证明。但是G作为一串符号，具有哥德尔数m，于是，G对自己说："我是不可证明的"。但如果纯粹的算术论断G是可证明的，它就断言了自己不可证明；反之，如果G是不可证明的，那么正如它所断言的，G就是不可证明的。然而，既然算术断言要么可证明，要么不可证明，那么算术论断所从属的形式系统如果无矛盾，必定不完备。即使这样，算术论断G确实是真的，因为它是一个关于整数的论断，可以通过较形式系统所允许的更直观的推理而建立。

人们还可以从下面的例子中把握和领会哥德尔的方案的精髓所在。考察这样的陈述，"这句话是假的"，我们遇上了矛盾。若这句话为真，它断言自己是假的；如果该句话为假，那么它为真。对此，哥德尔用"不可证明"取代"假"，这时句子变为："这句话是不可证明的"。于是，如果这句话不可证明，那么它讲的是真的；相反，如果这句话可以证明，那么它为假，或是按照标准逻辑，如果它为真，则不可证明。因此，当且仅当不可证明时这个陈述为真。这个结果没有矛盾，但却出现了一个不可判定的真陈述。

在展示了他的不可判定陈述之后，哥德尔将"算术是相容的"这一元数学陈述表述为一个算术陈述A，而且他证明了A蕴涵G。因而如果A是可证明的，那么G也是可证明的；既然G是不可判定的，那么A就是不可证明的，也就是不可判定的。这一结果表明，能被转换为算术系统的任何方法或逻辑原理，对于证明相容性都是无能为力的。

看上去似乎可以通过向形式系统加入逻辑原理或数学公理来避免不完备性。但哥德尔的方法表明：如果新加入的语句可以按他的方案，即对符号和公式指派一个哥德尔数，用算术术语表示，那么，不可判定的命题仍能被构造出来。唯一可行的方法是，使用不能被"映射"为算术的推理原理来避免不可判定的命题并证明一致性。下面是一个不很严密的类比：如果推理原理和数学公

理是日语，哥德尔的算术化是英语，那么只要日语可以翻译成英语，哥德尔的结果就能得到。

哥德尔不完备性定理断言，不仅仅是数学的全部，甚至任何一个系统，都不可能用类似哥德尔使用的能算术化的数学和逻辑公理系统加以概括。因为任何这样的公理系统都是不完备的。存在着有意义的陈述从属于这些系统，却不能在系统内部得出证明。然而非形式的论证可以证明其正确性。这个结论，即公理化的能力具有局限性，与19世纪末的观点形成了尖锐的对比。那时人们认为数学与公理化了的各分支的总和具有相同的广度，所以，哥德尔的结果是对内涵公理化一个致命的打击。公理化方法的这个缺陷本身并不是一个矛盾，但却是惊人的。因为数学家，尤其是形式主义者，原本期望任何一个真命题一定会在某个公理系统的框架内确立起来。因此，当布劳维弄清楚了直觉上明确的东西不及经典数学上证明的东西多时，哥德尔却证明了直觉的可靠超出了数学的证明。正像伯奈斯所说的，过分推崇公理体系是不明智的。当然，上述论点并没有排除这样的可能性，新的证明方法可能优于几个基础学派接受的逻辑原理所允许的方法。

哥德尔的两个结果都是毁灭性的。相容性不能证明给予希尔伯特形式主义哲学以沉重打击，因为他计划了以元数学为工具的这样一种证明，而且相信它能成功。然而，灾难大大超出了希尔伯特的方案，哥德尔关于相容性的结论表明，我们使用任何数学方法都不可能借助于安全的逻辑原理证实相容性，已提出的各种方法概莫能外。这可能是本世纪某些人声称的数学的一大特征，即其结果的绝对确定性和有效性已丧失。更为糟糕的是，由于相容性的不可证明，数学家们正冒着传播谬误的危险，因为不定什么时候就会冒出一个矛盾。如果真的发生了这种情况，而且矛盾又不能消除，那么全部数学都会变得毫无意义。因为对于两个相互矛盾的命题，必定有一个是假的，并且被所有的数理逻辑学家采用的蕴涵的逻辑概念，称为实质蕴涵，都允许一个假命题推出任何命题，因而数学家们正工作在厄运即将来临的威胁之下。不完

备定理则是另一场沉重打击，这里又一次直接牵涉到希尔伯特，虽然这个定理适合于所有关于数学的形式化方法。

尽管数学家们一般并没有像希尔伯特那样自信，可他们确实希望解决任何明确的问题。例如证明费马大定理（其断言没有大于 2 的整数满足 $x^n+y^n=z^n$）的努力，到 1930 年为止，已经产生了数百篇冗长而深奥的论文。也许这些努力完全是徒劳的，因为其很可能是不可判定的。

在某种程度上，哥德尔不完备性定理是对排中律的否定。我们相信一个命题非真即假，从现代数学基础的观点看，这意味着依据该命题归属的特定学科的逻辑规律和公理，它或者可以证明，或者可以证伪。但是哥德尔表明，有些命题既不能被证明，也不能被证伪。这是有利于直觉主义者的又一论据，他们是从其他角度出发反对排中律 的。

依然存在着证明相容性的可能，只要人们能够用不同于哥德尔的方法，给出一个包含了不可判定命题的系统。这是因为，根据前面提及的理由，关于实质蕴涵有：如果存在一个矛盾，任何命题都是可以证明的。但是迄今为止并没有得到上面的结果。

希尔伯特不相信他的失败，他是一个乐观主义者，对人类推理和理解的能力具有无限的信心。这种乐观主义给他以勇气和力量，但却阻止了他去了解可能存在的不可判定的数学命题。对希尔伯特来说，在数学领域中研究者除了自身的能力之外，没有任何其他的限制。

哥德尔 1931 年的结果发表的时候，希尔伯特正在和伯奈斯合作写一本关于数学基础的书（1934 年第一卷，1939 年第二卷）。因此，在第二卷的前言中作者们提出下面的观点：人们必须扩充元数学中的推理方法，其包括超限归纳法*。希尔伯特觉得，这些新原理仍旧是直观上可靠的，并且会被普遍接受。他坚持了这一方

* 通常的数学归纳法对全部有限正整数证明一个定理为真，而超限归纳法则把同样的方法推广到超限基数的良序集合。 ——原注

向，却没能取得新的成果。

在经历了严酷的 1931 年之后，进一步的进展使情况更加复杂，进而挫败了任何定义数学及何为正确结果的企图。但其中的一项工作还是值得一提。根茨 (Gerhard Gentzen)，希尔伯特学派的一员，他放宽了在希尔伯特元数学中对证明方法的限制，例如使用超限归纳法，在 1936 年设法确立了数论和分析中一些受限制部分的相容性。

根茨的相容性证明为一些希尔伯特主义者支持和接受，他们认为根茨的工作并没有超出人们乐于接受的逻辑的限制。于是，为了捍卫形式主义，人们必须从有限的布劳维逻辑发展到超限的根茨逻辑。根茨方法的反对派争辩说："可接受"的逻辑是如此地深奥莫测，而且我们对算术相容性的怀疑竟然可以用同样值得怀疑的元数学原理来缓解，这太不可思议了。事实上，对于超限归纳法早在根茨使用之前就有过争论，并且一些数学家尽量在任何可能的场合从证明中消除它。这不是一个直觉上使人信服的原理，正如魏尔评论的那样：这样的原理降低了有效推理的标准，且把原本可靠的东西变模糊了。

哥德尔不完备性定理引发的附属问题同样应当提及。既然无论多么错综复杂的数学分支都有不可判定的断言存在，那么我们对某一特定断言能否判定呢？这就是著名的判定问题。它要求一个有效的程序如同计算机一样，能在有限次步骤之内判定一个陈述或一类陈述的可证性。

为了具体化一个判定程序的概念，让我们考察一个很普遍的例子。为判定一个整数是否能被另一个整数整除，可以进行除法，如果没有余数，回答就是能。这同样适用于多项式的整除。类似的，对于判定方程 $ax+by=c$ 是否有整数解，同样存在一个明确的方法（这里 a、b、c 是整数）。

在 1900 年巴黎国际数学家大会的著名演讲中，希尔伯特提出了一个非常有趣的问题：人们能否通过有限步骤判定丢番图方程是否有整数解（希尔伯特第十问题）。由于方程 $ax+by=c$ 涉及两

个未知数且解必须为整数，所以它属于丢番图方程，而希尔伯特第十问题则更加一般化。在任何情况下判定问题都大大复杂于希尔伯特第十问题，但人们往往喜欢称这一类判定问题为希尔伯特第十问题，因为在希尔伯特问题上取得成果这一事实本身就使得该成果引人注目。

何为有效的程序？普林斯顿大学的教授丘奇（Alonzo Church）用递归函数，或者说可计算函数，给出了它的概念。让我们考察递归性的一个简单例子：如果定义

$$f(1)=1,$$
$$f(n+1)=f(n)+3。$$

那么，

$$f(2)=f(1)+3=1+3=4,$$
$$f(3)=f(2)+3=4+3=7。$$

依次类推，我们能连续地计算 $f(n)$ 的值，函数 $f(x)$ 就称为是递归的。丘奇对递归性的定义更加一般，但等价于可计算性。

1936 年，丘奇使用他新发展的递归函数的概念表明一般不存在判定程序。因此，对一个特定的断言，我们并非总能够找到一个算法判定它是否能证明。在所有特定的情况下人们都有可能发现一个证明，然而这样的证明能否被发现事先并没有检验标准。于是，数学家们尝试求证什么是不可以证明的可能是在浪费时间。至于希尔伯特第十问题，马蒂塞维奇（Yuri Matyasevich）于 1970 年证明：一般情况下没有算法能够判定相应的丢番图方程是否有整数解。这一问题也许并非不可判定，但不存在有效的程序，这意味着对今天大多数的数学家而言，没有一个递归的程序（不必是上面所描述的那一个）能预先告诉我们它是否可解。

不可判定的命题与不存在判定程序的问题之间存在着某种微妙然而却是明确的区别。不可判定的命题在一个特定的公理系统内是不可判定的，它们存在于任何有意义的公理系统中。例如，欧几里得平行公理就不能依据其他平行公理判定，另一个例子是断言实数是满足通常实数公理性质的最小集合。

还未得到解决的问题也许可判定，但这不总是能预先决定的。

尺规作图的三等分角问题至少有数百年被错误地看作是不可判定的问题，可它已被证明是不可能做到的。丘奇定理表明，不可能预先确定一个命题是否能证明或证伪，或许二者都不能，即该命题不可判定，但这可不像已知的不可判定命题那么明显。哥德巴赫猜想目前仍没有得到证明，也许依据数论的公理它是不可判定的，但现在还没能明显地看出这一点，这与哥德尔的例子恰恰相反。于是，不知什么时候，它或许能被证明或证伪。

尽管哥德尔对不完备性所做的工作及不可能证明相容性所带来的震撼已经过去十年了，但它们还没有从数学界完全消散，而新的震撼又一次来临。仍旧是哥德尔，他发表的一系列研究论文引起了更大的困惑：什么是正确的数学，它又正在向什么方向发展？我们再一次回想起起源于本世纪初的数学方法之一：在集合论的基础上构建数学大厦。正是基于这一理由，策梅罗公理系统获得了发展。

在《选择公理和广义连续统假设二者与集合论公理的相容性》（1940 年）一文中，哥德尔证明，如果策梅罗-弗兰克尔系统在除去选择公理后仍是相容的，那么加上这条公理以后这个系统也是相容的。这就是说，选择公理不能被证伪。同样地，康托尔的连续统假设（没有基数存在于$\aleph$与 $2^{\aleph_0}$之间，后者是实数集的基数*）与策梅罗-弗兰克尔系统（即使将选择公理包括进去）是无矛盾的，换言之，这些断言不能被证伪。为了证明他的结果，哥德尔构造了包含这些断言的模型。

在一定程度上，选择公理和连续统假设的相容性是令人信服的，就像对待其他的策梅罗-弗兰克尔系统的公理那样，人们至少是在充满自信地使用着它们。

然而，数学家们的自得，如果存在的话，被接下来的进展击得粉碎。哥德尔的结果并没有排除这样一种可能性，选择公理或

* 一般的连续统假设是，一个基数为$\aleph_n$的集的全体子集所成集的基是 $2^{\aleph_n}$ 即$\aleph_{n+1}$。康托尔已经证明了 $2^{\aleph_n}>\aleph_n$。 ——原注

是连续统假设（或者两者都）能够基于其他策梅罗-弗兰克尔公理得出证明。选择公理不可能在此基础上证明的思想至少可以回溯到1922年，从这一年开始的几年中，包括弗兰克尔在内的几个人，证明了选择公理的独立性。但是他们每一个人都发现，为了得出证明，必须向策梅罗-弗兰克尔系统加入某个辅助公理，并且以后其他人的证明也存在同样的缺陷。哥德尔在1947年推测连续统假设同样独立于策梅罗-弗兰克尔公理以及选择公理。

然而，在1963年，斯坦福大学的数学教授柯恩（Paul Cohen）证明了选择公理和连续统假设二者同时独立于其他策梅罗-弗兰克尔公理，如果后者是相容的。换言之，这两个论断并不能基于其他策梅罗-弗兰克尔公理得出证明，而且，即使把选择公理保留在策梅罗-弗兰克尔系统中，连续统假设、也包括一般的连续统假设，还是不能证明（然而，不包括选择公理的策梅罗-弗兰克尔系统，如果加入一般的连续统假设，都蕴涵了选择公理）。这两个独立性结果意味着在策梅罗-弗兰克尔系统中，选择公理和连续统假设都是不可判定的。特别是，对于连续统假设，柯恩的结果表明了有可能在$\aleph_0$和$2^{\aleph_0}$（即c）之间存在某个超限数，即便没有任何已知的集合具有这样一个超限数。

从原理而言，柯恩的称为力迫法的方法，与其他的独立性证明并没有什么不同。由此人们可能会联想到，为了表明平行公理确实独立于其他欧氏几何公理，人们必须要找出一个解释或者模型，它能满足除去存有疑问的平行公理之外的所有其他公理*。这一模型必须相容，否则它也许会满足存有疑问的公理。相对于弗兰克尔、哥德尔等人早期的证明，柯恩的改进在于他仅仅使用到了不包括任何辅助公理的策梅罗-弗兰克尔公理。还有，与选择公理的独立性存在早期证明（尽管不尽人意）相反，连续统假设的独立性在柯恩的工作之前一直悬而未决。

* 在群论中乘法交换公理独立于其他公理，某些模型满足它，如普通正整数和负整数；某些模型不满足它，如四元数。 ——原注

因此，为了在集合论基础之上（甚至在逻辑主义基础之上或是在形式主义基础之上）构造数学，人们可以有几种不同的做法。一种做法是避免使用选择公理和连续统假设，这将会限制一些能够证明的定理。《数学原理》在它的逻辑原理中就没有包括选择公理，可是确实在一些定理的证明中用到了，这时该公理得到了明确的表述。事实上，在现代数学中它是一个基本的定理。另一种做法是或者承认或者否认选择公理以及连续统假设。否认选择公理，可以假定即使对集合的可数族也不存在明确的选择；否定连续统假设，可以假定 $2^{\aleph_0}=\aleph_2$ 或 $\aleph_3$。柯恩正是这样做的，并且他给出了一个模型。

存在许多种数学，集合论（除去其他的数学基础）可以向许多方向发展。进而，人们可以只对集合的有限族使用选择公理，也可只对集合的不可数族使用选择公理，自然，还可以对任何集合族使用选择公理。这种种做法，均有人尝试过。

由于柯恩的独立性证明，数学陷入了类似于非欧几何所造成的混乱那样的窘境。众所周知（见第八章），平行公理独立于其他欧氏几何公理的事实，使几种非欧几何的构造成为可能。柯恩的结论提出了如下的问题：面对这两个公理，数学家们该做何种选择？即使只考察集合论公理化的方法，选择的多样性也同样令人不知所措。

这种选择之所以不能轻易做出，其原因是在每种情况下都会产生正面的和反面的后果。就像已经提及的，克制不用这两个公理，将会严格地限制能够被证明的定理，并且迫使人们排除许多在现存的数学中一直被认为是基础的东西。即使是证明任何无限集合 S 具有可数无穷子集，也需要选择公理。需要选择公理才能证明的许多定理在现代分析、拓扑学、抽象代数、超限数理论以及其他一些领域中都是基础性的定理，因此，不接受选择公理会使数学家们举步维艰。

与之相反，如果承认选择公理，那么某些证出的定理至少是违反直觉的。著名的巴拿赫-塔斯基（Banach-Tarski）悖论即是其

中之一，其可以描述如下：两个实心球体，一个大小与篮球相仿，另一个大小与地球一样，它们能够分别被分割成互不重叠的有限份，而且使得大球体的每一份与小球体的每一份对应全等。或者也可这样描述：可以把整个地球分成有限份，然而重新拼装成一个篮球大小的球体。1914 年发现的这个悖论的一个特例表明，一个球面可以分割成两部分并重新组合成两个完整的球面，每个新球面的半径都与原球面相同。与 19 世纪集合论碰到的悖论不同，这些新发现的悖论并不存在矛盾，它们只不过是集合论公理与选择公理的逻辑推论。

否定一般化的选择公理也导致了新奇的结论。一个技术结果或许对专家们更有意义，即每个线性集合都是可测的。换言之，既然选择公理蕴涵着不可测集合的存在，那么通过假定每个线性集合都可测就能否定选择公理。此外还有关于超限基数的新奇结论。至于连续统假设，无论承认它还是否认它，人们都冒着进入未知领域的风险，可是，有意义的结论迄今没有得到。但是，一旦假定 $2^{\aleph_0}=\aleph_2$，那么每个实数集合就都是可测的了。当然，还可以推导出其他的新结论，可是它们都不甚重要。

就像对平行公理的研究将几何学领到了一个十字路口那样，柯恩对这两个有关集合的公理所做的工作将以集合论为基础的数学也领到了错综复杂的交叉路口。这开创了数学的几个发展方向，但却没能给出任何明显的理由来说明哪个更为优越。事实上，自从柯恩 1963 年的工作以来，在策梅罗-弗兰克尔集合论中发现了如此众多不可判定的命题，使得人们对选择（使用基本的策梅罗-弗兰克尔公理再加入一条或多条不可判定命题）的多样性无所适从。选择公理和连续统假设的独立性证明就好比告诉一个建筑师，只要稍稍改动他的图纸，就可以用一个城堡取代他原来要建造的办公楼。

当前集合论的研究者希望他们能按照某种可靠的方式修改集合论公理，借此能确定是否可以从一组能够为数学家们广泛接受的公理出发推导出选择公理以及连续统假设。按照哥德尔的观点，

这些可能性应该是可以实现的，为此人们已付出了巨大的努力，但迄今为止没有成功。或许在未来的某一天，对于使用什么样的公理最终会取得一致的意见。

困扰数学家们的并不仅仅是哥德尔、丘奇以及柯恩的工作带来的问题，数学家们的麻烦与日俱增。由勒文海姆（Leopold Löwenheim）1915年开始的，通过从1920年到1933年之间斯科伦（Thoralf Skolem）发表的一系列论文得以简化和完成的一项研究，揭示了数学结构的又一缺陷，这就是为人们熟知的勒文海姆-斯科伦定理。设想人们为数学的某个分支，或者说就是为可以作为整个数学的基础的集合论，建立了合乎逻辑的数学公理，对此，最合适的例子莫过于用于整数的那组公理了。人们希望这些公理能确定整数的全部特性，并且仅仅是这些特性。然而奇怪的是，人们发现可以找出截然不同的解释或模型，都能满足这些公理。因此，鉴于整数集是可数的，或者按照康托尔的记法，存在$\aleph_0$个整数，则存在着与整个实数集合（甚至在超限的涵义上更大的集合）同样多元素的集合的解释。同理，相反的现象也可能出现，也就是说，假设人们承认了关于集合论的某个公理系统，进而还希望这些公理可以容纳并且的确能描述不可数集族的全部特性。然而，人们却发现了满足这个公理系统的可数集族以及其他一些与人们的常识非常不同的超限解释。实际上，每一个相容的系统都存在着相应的可数模型。

这意味着什么呢？假定人们打算开列一张特征表，并认为它可以刻划且仅仅刻划了美国人，但令人吃惊的是，某人发现了一种动物，其具有表上所列的全部特征，但它完全不同于美国人。换言之，试图用公理系统来描述一类唯一的数学对象事实上是不可能做到的。就像哥德尔不完备性定理告诉人们的，一组公理对于证明属于它们所覆盖的数学分支的全部定理是不充分的那样，勒文海姆-斯科伦定理告诉人们，一组公理能够容许比人们预期多得多的解释，而且这些解释具有本质的区别。公理没有限制住解释或是模型，因此，数学真理性不可能一丝不苟地与公理化一

致*。

非预期的解释之所以可能，原因之一在于每个公理化系统内部都有未定义的概念。先前人们认为这些概念是被公理隐含地加以定义的，可事实上公理并没能做到这一点。因此，未定义概念的概念必须以某种非预期的方式加以更改。

勒文海姆-斯科伦定理与哥德尔不完备性定理同样惊世骇俗。对于发端于20世纪初的公理化方法而言，它无疑是另一次沉重打击。直到不久前公理化仍被认为是唯一可靠的方法，而且仍被逻辑主义者、形式主义者和集合论公理化主义者使用着。

从总体上来看，勒文海姆-斯科伦定理并不出人意料。哥德尔不完备性定理表明每个公理化系统都是不完备的，即存在着不可判定的命题。假定 P 就是一个这样的命题，那么不管是 P 还是非 P 都不能从这些公理中推导出来。因而人们可以接受一个更大的公理系统：原来的公理集合加上命题 P 或是命题非 P。由于解释不会是同构的，所以这两个公理系统也不是无条件的，也就是说，不完备性是有条件的。但勒文海姆-斯科伦定理是以一种更强硬也更根本的方式否定了无条件性。它证实了对于一个给定的公理系统，可以存在完全不同的解释或模型，而这无须加入任何新的公理。当然必须得出不完备性，否则的话，完全不同的解释是不可能的。而且为了不被所有的解释所共同包容，关于某个解释的一些有意义的陈述也必定会是不可判定的。

经过对自己的结论再三考虑之后，斯科伦在1923年的一篇论文中表示，对于把公理化方法当作集合论的基础他是持反对意见的。即便是冯·诺依曼也在1925年表示赞同他自己的公理以及其

* 旧课本"证明"了基本系统是无条件的，换言之，所有关于基础公理系统的解释同构——本质相同而表述不同。但这些"证明"即使用希尔伯特元数学所禁止使用的逻辑原理来衡量，也是不严密的，并且公理化基础也没有像今天这样仔细地系统阐述。没有什么公理集合是无条件的，即使是希尔伯特所"证明"的还是其他什么。

——原注

他关于集合论的公理系统全都贴上"不真实的标记，……集合论不可能无条件地公理化。……既然算术、几何等不存在公理体系，而对集合论却没有这样假定，那么也就必定不存在无条件的公理化无穷系统。"这一情况，他继续写道，"对我而言，是有利于直觉主义的又一论据。"

数学家们试图通过回想非欧几何的历史使他们自己平静下来。在对平行公理争论了几个世纪之后，罗巴切夫斯基和鲍耶创立了他们的非欧几何，黎曼也给出了另一个几何学。数学家们起初倾向于抛弃这些新生的几何学，这有若干理由，其中之一是它们必定是不相容的，可后来的解释表明它们是相容的。例如黎曼的双椭圆几何学，与人们开始的意愿（应用于普通平面的图形）完全不同地按照球面上的图形得到了解释（见第八章）。然而，这个解释或模型的发现是受欢迎的，它证实了相容性。而且黎曼最初的期望与后来的解释在研究对象的数目上并没有引入什么不同，无非是点、线、面、三角形等等而已。用数学的语言来讲，这两个解释是同构的。然而，勒文海姆-斯科伦定理所适用的公理系统的不同解释并不同构，它们是完全不同的。

关于数学的抽象性，彭加勒曾经说过，数学是一门为不同事物起相同名字的艺术。例如，群的概念就可以表示整数、矩阵以及几何变换的全部特性。勒文海姆-斯科伦定理支持了彭加勒的观点，然而却改变了它的含义。人们并不期望群公理能表明所有解释具有相同的适用范围和特性（群公理不是无条件的；如果忽略平行公理，欧氏几何也不是无条件的）；与此相反，数学家们原以为适用勒文海姆-斯科伦定理的那些公理系统只指明一个特定的解释，于是，当它们适用于完全不同的解释时，令数学家们茫然不知所措。

上帝打算毁灭某些人，首先是使他们发疯。也许是上帝仍不相信哥德尔和柯恩的工作，或者是勒文海姆和斯科伦还打算施展什么诡计，他们又开始了进一步的发展，似乎要使数学家们陷入绝境。在探讨微积分时，莱布尼茨引入了无穷小量（见第六章）。

他认为无穷小量比 1，0.1，0.01，……以及其他任何正数都小，但不是零。进一步他认为，人们可以像使用其他普通数一样使用无穷小量。虽然它只是一种理想的元素，或者说是一种虚构的东西，但确实是有用的。事实上，对莱布尼茨而言，微积分学的基本概念——导数，就是两个无穷小量的比值。莱布尼茨还像对普通数值那样，也使用了无穷大量。

在整个 18 世纪，数学家们一直为无穷小的概念争论不已。一方面，他们任意地、甚至是不合乎逻辑法则地使用它们；另一方面，他们最终又把无穷小作为没有意义的东西而扔掉。柯西不仅拒绝无穷小量而且想努力消除它们，然而，无穷小是否合理的问题依旧存在。米塔格-莱夫勒（Gösta Mittag-Leffler）有一次问康托尔，在有理数与实数之间是否存在另外一类数，后者坚决予以否认。1887 年，康托尔又证明了无穷小量在逻辑上是不可行的。这个证明从根本上依赖阿基米得公理，即对于任意实数 a，总存在一个整数 n，使得 na 大于另一给定的实数 b。皮亚诺也证明了无穷小量不存在。罗素在他的《数学原理》中对此表示赞同。

然而，即便是伟人的号召，也不会得到非常迅速的响应。从亚里士多德时代以及从那时起很长的一段时间里，地球是球体的观念被众多思想家认为是荒诞不经而遭摒弃。因为如果是那样，生活在地球另一面的人就会在空中倒垂着他们的头颅。可事实上，球体才是正确的观念。同样地，尽管莱布尼茨关于无穷小量的证明必须摒弃，依然有许多人试图为它建立一个合乎逻辑的推论。

杜布尔-雷蒙、斯笃兹（Otto Stolz）和克莱因的确认为基于无穷小的相容理论是可能的。事实上，克莱因指出，为了得到一个这样的理论，就必须放弃阿基米得公理这一关于实数的最基本的公理。斯科伦也在 1934 年引入了不同于普通实数的一种新数，超整数，而且给出了它们的一些性质。若干数学家的一系列论文最终导致了一种使无穷小合理化的新理论的产生，而最重要的贡献则是由罗宾逊（Abraham Robinson）作出的。

称为非标准分析的新系统引入了超实数，它包括原有的实数

以及无穷小。正像莱布尼茨所做的那样，一个正无穷小被定义为小于一切普通的正数而大于零的数值；类似的，一个负无穷小则大于一切负实数而小于零。这些无穷量都是固定的数值，从而它们既不是莱布尼茨意义上的变量，也非可以逼近零的变量，而是柯西有时使用这个术语时所表示的含义。更进一步，非标准分析又引入了新的无穷大数，它们是无穷小量的倒数但不是康托尔的超限数。每一个有限的超实数 r 可表成 $x+a$ 的形式，其中 x 是一个普通的实数而 a 是一个无穷小量。

有了无穷小的概念，人们就可以说两个超实数无限接近了，这意味着它们的差是一个无穷小量。于是每个超实数都无限地接近于一个普通的实数，因为差恰好是无穷小。人们可以随心所欲地使用超实数，就像使用普通的实数那样*。

使用新的超实数系统，人们可以引入其值既可以是普通实数又可以是超实数的函数。根据这些数，人们还可以定义函数的连续性：如果 $x-a$ 是无穷小量，那么 $f(x)-f(a)$ 也是无穷小量，此时称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续。我们还可以用超实数定义导数和其他微积分的概念，进而证明分析的全部结论。最主要的一点是：超实数系统使人们能以一种精确的方式取得微积分学的成果，而先前人们正是因为不清晰甚至无意义而拒不接受微积分**。

使用新的数系将会增长数学的力量吗？迄今为止，通过这种

---

* 如果使用实数通常的公理性质，那么康托尔和皮亚诺的证明是正确的，这条必须修正以容纳超实数的性质即为上面描述的阿基米得公理。R^*，这个超实数的系统，在通常意义上是非阿基米得的，但如果我们允许超实数系统的数 a^* 的无穷多倍，它就是阿基米德的。——原注

** 例如，根据非标准分析，在系统 R^* 中存在无穷小的比值 $\frac{dy}{dx}$，对 $y=x^2$，$\frac{dy}{dx}$ 就是 $2x+dx$，其中 dx 是一个无穷小量。也就是说，$\frac{dy}{dx}$ 是一个超实数，导数 $2x$ 是这个超实数的标准部分。类似的，定积分是无穷多个无穷小量的和的标准部分，而被加数的个数本身是一个非标准的自然数。——原注

方法仍没能得到任何有重大意义的新结论，可重要的是又开创了一条新路，而这正是一些数学家所渴望的。事实上，关于非标准分析的论著已经并正在不断涌现，而另外一些人则因为这样或那样的原因而责难这种新型的分析。但是，物理学家们确实得救了，因为即便是在知道了柯西已摒弃无穷小之后，为了方便起见，他们仍旧在使用着这一有益的工具。

1900 年以来数学基础的进展是令人迷惑的，即使在目前，数学的状况仍旧杂乱无章，前进的道路上不再有真理的光芒。曾被普遍赞赏和普遍接受的数学，其证明尽管有时需要校正，但曾被认为是可靠推理的极致，到现在，这种看法改变了。对待数学可以采取相互矛盾的态度，在逻辑主义、直觉主义和形式主义的基础之外，集合论的方法又独立地给出了众多的选择。一些有歧义的甚至是矛盾的观点在其他学派内也是可能的。正由于此，在直觉主义哲学内部，可构造化运动又分成了许多小派别。对形式主义，什么样的数学原理可以使用存在众多有待取舍的选择。而非标准分析，虽然并不属于任何一个学派，却允许采取在分析中会引起歧义甚至是矛盾的观点的态度。无论如何，以前曾被当作不合乎逻辑的和应该摒弃的，现在却被一些学派认为是逻辑上可靠的而接受。

至此，旨在消除可能存在的矛盾与建立数学结构相容性的努力宣告失败。是接受公理化方法，还是接受非公理化的直觉主义方法，如果接受公理化方法又接受哪些公理，对这一切再也不会存在一致的看法了。数学是建立在各自的公理集合之上的一组结构，这一流行的观点不足以包含数学所应该包含的东西，另一方面又包含了比它应该包含的更多的东西。不一致甚至殃及到推理，排中律不再是毫无疑义的逻辑原理，争论的焦点是存在性证明中不允许计算其存在性正被确立的量及是否可用排中律证题，为此，完美推理的观念必须放弃。显然不同的数学将导致选择的多样性，因此，近期数学基础研究所谓取得突破性的进展不过是邂逅了又一片荒野。

我们上面描述的自 1931 年以来取得的这些成果，使得逻辑主义者、形式主义者和集合论公理化主义者彻底绝望，而唯有直觉主义者对此保持了某种程度的镇定和乐观。使用逻辑符号和原理所做的全部工作，即使对最睿智的伟人的思想也构成了责难，对直觉主义者却是风马牛不相及。数学的相容性是显然的，因为直觉的意义保证了这一点，至于选择公理和连续统假设，他们并不承认。并且布劳维在 1907 年已对此讲得相当多了，不完备性和不可判定命题的存在不仅没有使他们感到困扰，而且他们还振振有词：我早就这样跟你讲过了。然而，即使是直觉主义者也不希望抛弃在 1900 年之前建立的那部分不合乎他们标准的数学。他们已经断言，通过使用排中律确立数学的存在性是不能接受的，只有允许人们按照希望的精确度对其存在性正被证实的量实施运算的那些构造，才是令人满意的。因此，他们仍在争论着构造性的存在性证明。

总之，没有哪个学派有权力宣称它就代表了数学，而更加不幸的是，正如海丁在 1960 年评论的，从 1930 年开始，无休无止的论战取代了友好合作的精神。

在 1901 年，罗素说到，“现代数学最主要的成就就在于发现了什么是真正的数学。”这些话至今仍能自然而然地打动我们。除了几个学派在作为今天的数学什么是可以接受的问题上存在分歧之外，人们可以对将来给予更多的期望。现存的学派一直在忙于证明当前的数学是正确的，但如果注意到希腊数学在 17 世纪和 19 世纪的遭遇，人们就会发现戏剧性的巨变。这几个现代学派试图证明 20 世纪数学的正确，可它们能符合 21 世纪数学的要求吗？直觉主义者确实在思索着数学的成长与发展，可是他们的“直觉”有能力给出或产生历史上没有的东西吗？当然，即便在 1930 年，回答也是否定的。因此，对数学基础的修正看上去总是必需的。

一个寓言恰如其分地概括了本世纪有关数学基础的进展状况。在莱茵河畔，一座美丽的城堡已经矗立了许多个世纪。在城

堡的地下室中生活着一群蜘蛛，突然一阵大风吹散了它们辛辛苦苦编织的一张繁复的蛛网，于是它们慌乱地加以修补，因为它们认为，正是蛛网支撑着整个城堡。

第十三章　数学的孤立

> 我已决定只放弃抽象几何，即放弃对仅有智力训练意义的问题的思考。而这是为了研究另一种以解释自然界现象为目标的几何。
>
> ——笛卡尔

数学史中充满了光辉的成就，但它同时也是一部灾难的记录。真理的丧失当然是最重大的悲剧，因为真理是人类最珍贵的财富，即使丧失一个也足以令人扼腕。对数学的另一个打击是意识到人类推理的成就所展示的结构绝非完美，而是有着种种缺陷，对任何时候发现的灾难性的悖论都不堪一击。但这还不是伤心的唯一原因。深深的怀疑以及数学家们之间的分歧来自于在过去一百年中研究方向的不同。大多数数学家从现实世界中退缩而关注于数学之中产生的问题。他们放弃了科学。这个方向作为应用数学的对立面而被称为纯数学。但是应用的和纯粹的这些术语并不能十分精确地说明所发生的变化。

数学是什么？对于前人来说，数学首先是人们为研究自然界而做出的最精致的发明。数学的主要概念、广博的方法，以及几乎所有的重要定理都是在这一过程中推导出来的。科学一直是维持数学生命力的血液。在科学领域中，数学家是物理学家、天文学家、化学家及工程师的热心同伴。事实上，在17、18世纪以及19世纪的绝大多数时间里，数学与理论科学的区别很少被注意到，而且许多杰出的数学家在天文学、力学、动力学、电学、磁学及弹性理论中所做的工作远超过他们在数学中的工作。数学是科学的王后，同时也是它们的女仆。

我们已经叙述了（第一章至第四章）自希腊时期起为了揭示自然界的数学奥秘的漫长努力，这种致力于自然界的研究并没有把所有的应用数学束缚于物理问题的求解。伟大的数学家们时常越过科学中的眼前问题，因为他们大智大慧，深刻了解数学的传统作用，并且能够明确那些在科学事业中被证明是具有重大意义的方向及澄清那些对研究自然有帮助的概念。彭加勒在天文学上投入数年功夫，写出了巨著《天体力学》，他看到了探求微分方程中新的主题之必要性，它也许最终会推动天文学。

有些数学上的研究导致并且完善了一些已被证明有用的学科。如果在一些不同的应用中用到了同一类型的微分方程，则为了发现改进的或一般的解法，或为了尽可能多的了解关于整个解族的情况，数学家们会研究一般类型。正是数学的这种高度抽象的特点，使得它可以表示完全不同的物理现象。因此，水波、声波及无线电波都用一个偏微分方程来表示。事实上，这一方程被称为波动方程。通过对波动方程本身的进一步考察而获得的其他数学知识，首先起源于对于声波的研究。由现实世界中的问题而获得的丰富结构，可以由认识到在不同情况中的相同数学结构及其共同的抽象基础得到加强。

为了保证物理问题的数学方程有解，柯西率先建立微分方程的存在性定理，这样才能充满信心地寻求这个解。因此，尽管这项工作完全是数学的，但它却有着深远的物理意义。康托尔的关

于无限集的工作导致了纯数学上的许多探讨，但它首先是受他试图解决关于傅立叶级数的极为有用的无穷级数的问题激发的。

数学的发展要求对独立于科学的问题进行探求。我们看到（见第八章）19 世纪的数学家已经意识到许多概念的含混不清以及它们论据的不足。追求严密性的这一广泛运动的本身当然既不是对科学问题进行探讨，也不是几个学派重建基础的尝试。所有这项工作虽然是致力于数学，但显然是对整个数学结构的迫切需要的反应。

简而言之，有许多纯的数学研究完成了或加强了旧的领域，甚至开辟了新的领域，它们对探索应用意义重大。所有这些方向的研究都可以看作是具有广泛意义的应用数学。

那么一百年前就没有单纯地为其自身、而不是为实用而创建的数学吗？有的。一个突出的例子就是数论。尽管毕达哥拉斯认为对整数的研究是对实际物体的构成的研究（见第一章），但是数论很快就由于它自身的原因引起了人们的兴趣——它是费马的主要课题。文艺复兴时期的艺术家们为了获得绘画中的真实感而创建了投影几何，笛萨格从事了这方面的研究。帕斯卡提出了欧氏几何的更高级方法，使之在 19 世纪成了纯美学的研究，尽管即使在那时这种研究也是由于它与非欧几何的重大联系。许多其他的研究课题则纯粹是由于数学家发现它们有趣或富有挑战性。

然而，与科学完全无关的纯数学不在主要的考虑之列。从科学引起的更富生命力且令人极感兴趣的问题中分离出来，这只是一种嗜好。尽管费马是数论的奠基人，但他更多的精力是投入到解析几何的发明、微积分问题以及光学（见第六章）。他试图引起帕斯卡和惠更斯对数论的兴趣，但是失败了。17 世纪，很少有人会对这类学科产生兴趣。

欧拉确实在数论上花了一些功夫，但欧拉不仅仅是一个 18 世纪卓越的数学家，他也是卓越的数学物理学家。他的研究范围从解决物理问题的数学方法如微分方程求解，到天文学、流体运动、舰船的设计、火炮、制图、乐器理论以及光学。

拉格朗日也在数论上投入了一些时间。但是他也同样把他毕生大部分精力花在了对应用至关重要的数学——分析之上（见第三章）。他的代表作是《分析力学》，讨论数学在力学中的应用。事实上，在1777年他抱怨道："算术研究给我带来了极大的麻烦，而且也许毫无价值。"高斯也在数论方面作出了令人瞩目的成就，他的《算术研究》（1801年）是一部经典名著。如果只看这部著作，则很容易相信高斯是个纯数学家，但他的主要精力却放在了应用数学中（见第四章）。克莱因在他的19世纪数学史中称《算术研究》为高斯青年时期的作品。

虽然高斯在晚年确实回到了对数论的研究，但他显然不认为这一学科十分重要。证明费马大定理问题即没有大于2的整数满足$x^n+y^n=z^n$，常常困扰着他，但在1816年3月21日写给奥伯斯（Wilhelm Olbers）的一封信中，高斯称费马猜想是一个孤立的定理，没有什么意义。他还说，有许多既不能证明也不能证伪的猜想，但他是如此繁忙，以至于没有时间去考虑他在《算术研究》中所做过的那类工作。他希望费马猜想也许能在他所做的别的工作基础上得到证明，但那将是最无意义的推论了。

高斯曾说"数学是科学中的王后，而数论是数学中的王后。她经常屈尊降贵为天文学及其他自然科学助一臂之力，但无论如何，她总是处在最重要的位置。"这说明了他对纯数学的偏爱。但高斯的毕生事业并没有遵从这句话。他很可能只在某些闲暇的时候做到了这一点。他的格言是："你，自然，我的女神；对你的规律，我的贡献是有限的。"富有讽刺意义的是：通过有关非欧几何的工作，他对于数学与自然一致性的一丝不苟的证明，对怀疑数学的真理性起着深远的影响。对于1900年以前所创建的数学，我们可以得出一般的结论：存在纯粹数学，但不存在纯粹的数学家。

一些进展奇妙地改变了数学家们对自己工作的态度。首先是认识到数学并非一个关于自然的真理体系（见第四章）。高斯在几何中使这一点很清楚，而四元数及矩阵迫使人们意识到这一点，亥姆霍兹理解得更透彻——即使是一般的数的数学也并非是可用的

先验理论。数学的实用性虽说无懈可击，但对真理的探求不再证明数学的努力全然正确。

此外，像非欧几何和四元数这些重大的发展尽管是受物理思考的启发，显得与自然不一致，但其导出的发明是实用的。人们认识到人为的发明同那些看起来遵从自然界的固有规律的事物一样有意义，这很快成为全新的数学方法的一个论据。因此，许多数学家得出结论：没有必要去研究现实世界中的问题，人为的数学来源于人的大脑并肯定将会被证明是有用的。事实上，不受限于物理现象的纯思维，也许会做得更好。不受任何约束的想象力也许能创造出更为有力的理论，而它们同样能在理解和掌握自然中找到应用。

还有其他的原因使得数学家们逃离了现实世界。数学和自然科学的巨大扩展，使得在两个领域中得心应手变得十分困难，而以前的巨匠们钻研过的科学问题更加难解了。既然如此，为什么不立足于纯数学，以使研究更简单呢？

使得数学家们着手于纯数学问题的另一因素是：自然科学的问题很少能彻底解决。人们可以得到越来越好的近似解，但得不到一个最终的解答。一个基本问题——例如三体问题，即像太阳、地球及月球这样的三个天体，每一个都靠万有引力吸引着其他的两个，它们的运行规律还没有解决。正如培根所言，自然界的精巧远胜于人类智力。另一方面，纯数学允许明确的有所限制的问题，其完全解是可以得到的，把明确的问题与复杂度和深度无限的问题相对立这一点颇为有趣，即使是像哥德巴赫猜想这样的至今尚未征服的少数难题，也有着极富诱惑力的论述上的简洁性。

另一促使数学家从事纯数学问题研究的因素是来自大学之类机构的出版成果的压力。由于应用问题需要除了数学之外的自然科学的丰富知识，这就使那些待解决问题愈加困难，因此，提出自己的问题并尽力解决就容易得多了。教授们不仅自己选择那些易于求解的纯数学问题，还把它们指定给他们的博士，以便他们可以很快地完成学位论文，同时教授们也能够更轻易地帮助他们

克服所遇到的困难。

几个现代纯数学所循方向的例子可以使纯数学与应用数学的区别更清楚。一个领域是抽象化。自从哈密尔顿引入了他在思维中赋与了物理应用的四元数后，其他数学家意识到可以有多种代数，而不顾其有无潜在实用性。这一方面的研究结果充斥了今日的抽象代数领域。

纯数学的另一方向是一般化。圆锥曲线——椭圆、抛物线、双曲线——代数上以二次方程来表示，有一些以三次方程表示的曲线也具有实用意义。一般化的研究一下子跳到 n 次方程所表示的曲线，而且对其性质进行了详细的研究，尽管这些曲线根本不大可能在自然现象中出现。

通常，具有一般性或抽象性的论文毫无实用价值。实际上，大多数这样的论文致力于把当前存在的用具体明确的语言描述的公式用更一般的、更抽象的或新的术语进行重新公式化，而这样的重新公式化对于应用数学的人来说，既不能提供更为有力的方法，也不能提供更深刻的见解。这些增加的术语大部分是人造的，与物理思想无甚联系，但据称能提出新的思想，当然并不是对数学应用的贡献而是阻碍。它是新的语言，但不是新的数学。

纯数学研究的第三个方向是专门化。欧几里得考虑和回答是否有无穷大的素数。现在“自然”的问题则是是否任何七个连续整数中有一素数。毕达哥拉斯引入了亲和数的概念。如果一个数的因子之和等于另一个数，则称这两个数为亲和数。例如，284 和 220 就是亲和数。列奥纳多·迪克森，杰出的数论专家，引入了三元亲和数：“我们说三个数构成三元亲和数，如果其中一个数的真因子之和等于另外两数之和。”他还提出了如何寻找这类数的问题。另一个例子是关于强大数（*powerful number*）的。一个强大数是这样一个正整数，如果它能被素数 p 整除，则也能被 p^2 整除。有没有（除 1 和 4 之外）正整数其可用无穷多种方法表为两个互为素数的强大数之差呢？

选择这些专门化的例子，是由于它们易于陈述和理解。它们

并不能完全代表这类问题的复杂性和深度，然而，专门化已经变得如此广泛，而且问题是如此狭窄，以致于没有几人能弄懂它，就像当初相对论问世时，全世界仅有 12 人懂得它。

专门化如此泛滥，以致于并不致力于应用数学的大多数布尔巴基派成员也认为必须提出批评了。

> 许多数学家在数学王国的一角占据了一席之地，并且不愿意离开。他们不仅差不多完全忽略了与他们的专业领域无关的东西，而且不能理解他们的同事在远离他们的另一个角落使用的语言和术语。即使是受过最广博的训练的人在浩瀚的数学王国的某些领域中也感到迷茫，像彭加勒和希尔伯特这样的人，几乎在每个领域都留下他们天才的印迹，甚至在最伟大的成功者中也是少而又少的极其伟大的例外。

专门化的代价是创造力的枯竭，专门化需要鉴赏力，因为它很少提供有价值的东西。

抽象化、一般化和专门化是纯数学家从事的三类活动。第四类是公理化。毫无疑问，19 世纪末的公理化运动是有助于加固数学的基础的，虽然它并没有为解决基础问题划上句号，但一些数学家从此却开始了对新创的公理体系的细枝末节的修改。有些人可以通过重述公理，使表述更为简洁。有人则通过繁琐的文字叙述把三条定理合为两条。还有一些人则选择新的未定义概念，通过重新组织那些公理因此而得到与原来相同的理论体系。

如我们看到的，并非所有的公理化都毫无用处，但所能做的这些修修补补实在是意义不很大。解决实际问题要求人们全力以赴，因为必须面对这些问题，但公理化却允许各种各样的自由。它基本上是人们深层次结果的组织，但是人们是否选了这一组公理而不是那一组，是 15 条还是 20 条，是无关紧要的。实际上，甚至一些杰出的数学家也曾花费过时间来研究过各种各样的变体，它们被贬斥为“微不足道的假定”。

本世纪的最初几十年中在公理化上花的时间和精力是如此之多，以致于魏尔在1935年抱怨说公理化的成果已经穷尽。尽管他很清楚公理化的价值，他还是恳求人们回到实际问题上来。他提出公理化只是对实在的数学赋于精确性和条理性，它是一个分类函数。

不能把所有的抽象化、一般化、专门化问题以及公理化看作是纯数学。我们已指出这样一些工作及基础研究的价值，我们必须了解这项工作的动机。纯数学的特征是它不具有直接或间接应用意义。纯数学的实质在于问题就是问题，有些纯数学家分辩说，任何数学发展都具有潜在的实用价值，只是没有人能预见到其未来的应用。不过，一个数学主题犹如一块蕴藏石油的土地，表面的黑色坑洼可能提示出一个特定的开采石油的地点，如果发现了石油则这块土地的价值也就确定了。被证实的价值保证了在离它不太远处继续钻井有望找到更多的石油。当然，也可以选择一个离它很远的地方，因为这里钻井比较容易，而且仍然有望获得石油。但人的精力和智力有限，因此应当投入到把握较大的冒险中。如果目标是潜在的应用，那么，正如杰出的物理化学家吉伯斯(Josian Willard Gibbs)所言，纯数学家可以无所顾忌，为所欲为，而应用数学家至少应保持一点清醒的头脑。

对纯数学——为其本身意义而存在的数学——的批判可追溯到培根的《学术的进展》(1620年)。他反对纯粹的、神秘的、自足的数学，说它“完全脱离实际和自然哲学的原理，只是满足了这样一些人的胃口，他们希望阐述和了解对人的头脑并不重要的东西。”他这样理解应用数学：

> 自然界的许多部分不能没有数学的帮助或介入，必须靠足够的精巧来发明，或足够的娴熟技巧来显示，或足够的熟练来帮助应用，包括透视学、音乐、天文学、宇宙结构学、建筑学、机械学及其他……。因为随着物理学的日新月异的发展及新的公理的推出，它将会在许多方面有求于数学新的帮助。

因此应用数学的混合部分就变得益发多了。

在培根的时代，数学家对于物理研究的关注毋须多提，但今天的事实是他们逃离了自然科学。在过去的100年中，在那些恪守古老的、高雅的数学活动目的——这一目的到那时为止提供了实质性和丰富的主题——的人和那些听凭兴趣所至从事研究的人之间产生了分裂。如今，数学家与科学家分道扬镳，比较新的数学发明少有实用价值，而且，数学家和科学家不再互相理解。令人不安的是随着专门化的日益深化，数学家甚至不再了解其他的数学家。

脱离“现实”，为了其自身原因而进行研究的数学，几乎从一开始就激起了反对。在傅立叶的经典著作《热的分析理论》（1822年）中，他热情地称颂数学在物理问题中的应用：

> 对自然的深入研究是数学发现最丰富的源泉，这种研究的优点不仅在于有完全明确的目的性，还在于排除含糊不清的问题和无用的计算。它是构筑分析本身的一种手段，也是发现最重要的，自然科学必须始终保持的思想的一种方法。而基本的思想是那些表示自然现象的思想。……
>
> 它的主要特征是清晰，没有令人迷惑的符号，它把截然不同的现象放到一起，发现它们隐含的相似性。如果物质绕开我们，比如空气和光，那是因为它们特别稀薄；如果物体被固定在远离我们的无限的宇宙中，如果人类想要了解长时间来天体的运行，如果重力和热能在一个固体球体内部深不可测的地方永恒地作用着，数学分析还是能抓住这些现象的规律，并使它们表面化且可测，就像注定要用人类的推理能力来补偿生命之短暂和感官之不完善；而更奇妙的是，在对所有的现象进行研究时，它遵循同样的方法，为了验证宇宙设计的统一性和简洁性、使统治所有自然事物的永恒秩序更清晰，它用同样

的语言来诠释一切。

尽管雅可比在力学和天文学中做出第一流的工作，但他却向他认为至多是一面之词的论点提出了异议。1830年7月2日，他写信给勒让德说："傅立叶确实认为数学的主要目标是公众的利益和对自然现象的解释；但像他这样的科学家应该知道自然科学的唯一目标是人类精神之荣耀，而且依此为据，数论问题和一个关于行星系的问题同等重要。"

当然数学物理学家们并不偏袒雅可比的观点。汤姆逊(Willian Thomson)和泰特(Peter Guthrie Tait)在1867年称最好的数学是由应用提出的，它会产生令人惊讶的纯数学的理论，但那些把自己囿于纯粹分析或几何的数学家们却不能达到那个富饶美丽的数学真理之乡。

许多数学家也为新的纯粹研究的趋势忧心忡忡，1888年克罗内克写信给数学、物理及医学上都颇有建树的亥姆霍兹说，"你的合情合理的实际经验与有趣的问题造成的财富将给数学家们指明新的方向，注入新的动力。……片面而过分内省的数学思维把人们带向不毛之地。"

1895年，当时数学界的领袖人物F·克莱因也感到有必要反对这种抽象的纯粹数学趋势：

> 在现代思维的急速发展中，我们禁不住要担心，我们的科学面临着越来越独立的危险。自现代分析兴起以来，对数学和自然科学双方都有裨益的二者之间的紧密联系，正面临着被破坏的危险。

在他《陀螺的数学理论》(1897年)中，克莱因又回到了这一问题：

> 当今数学科学中最大的需要是纯数学和自然科学的各个分支——在此以后将找到它最重要的应用——应当再一次建立起紧密的联系，这一联系在拉格朗日和高斯的工作中已被证明是极富成果的。

彭加勒在他的《科学与方法》中尽管对某些19世纪后期的纯逻辑创造颇有微词(见第八章)，但还是承认公理化、不一般的几

何及奇特函数向我们显示了当人们的智力越来越多地从外部世界的统治中解放出来，它会创造出什么奇迹。然而他坚持“我们必须把大部分精力投入另一方向，即自然界的那一边”。在《科学的价值》中，他说：

如果不记住了解自然界的欲望在数学的发展过程中所起的最重要的和最令人愉悦的影响，就会完全忘记科学史。……忘记外部世界之存在的纯数学家将会像一个知道如何和谐地调配色彩和构图，但却没有模特的画家一样。他的创造力很快就会枯竭。

稍后，1908年，F．克莱因由于担心创造任意结构的自由会被滥用，他再次强调说：任意的结构是“所有科学的死亡”，几何的公理“不是任意的，而是切合实际的陈述。它们通常由对空间的知觉引出，其确切内容则依方便而定。”为了给非欧几何一个公正的评价，他指出视觉只在一定限度内验证欧几里得平行公理。另一方面，他指出“任何持有自由之特权的人必须承担责任”。这里的责任，克莱因指的是对自然界进行探索。

克莱因晚年曾是数学界的圣城——哥廷根大学数学系的泰斗。他感到必须做一次更有力的抗议。在他的《19世纪的数学发展》(1925年)中，他回忆了傅立叶用所能得到的最好的数学方法解决实际问题的兴趣，并把这与纯数学的精雕细刻和把具体概念抽象化相比。他写道：

我们这个时代的数学就像是和平时期的一个伟大的兵工厂，橱窗里满是为了吸引行家的巧妙、精致和好看的各种玩艺儿，它们的真正动机和目标——战斗和征服敌人——已经几乎完全被遗忘了。

库朗，继克莱因之后的哥廷根的数学领袖，后来又成了纽约大学库朗数学研究所的头，也为过分强调纯数学而悲哀。在1924年库朗和希尔伯特的《数学物理方法》第一版的序言中，库朗以这样的评论为开篇：

过去，数学从分析的问题和方法与物理学直观

> 思想的紧密联系获取有力的刺激，然而近年来这种联系呈现松散的趋势。数学研究离开了数学的直观出发点，特别是在分析中集中于其方法的精致及概念的准确。许多分析的领袖人物丧失了他们的学科与物理学及其他领域联系的知识。另一方面，物理学家也不再体会数学家的问题和方法，甚至包括他们的语言和兴趣。科学发展的洪流，可能逐渐分流为越来越细小的溪渠，以至干涸。为了摆脱这种厄运，我们必须将数学研究与自然科学联系起来，只有这样，学者们才能为研究工作更进一步的发展打下基础。

1939年库朗再一次写到：

> 数学不过是一个从定义和假设中抽取的结论体系，它必须保证一致性，除此以外数学家可以随心所欲地加以创造，这样一种断言蕴含着对科学的生命力的一个严重的威胁。假如这一描述准确，则数学不能吸引任何有知识的人。它将是一个没有动机、没有目标的定义规则和推理的游戏。智力能够任意地推出有意义的假设体系不过是伪真理，自由的思维只有在有机整体的约束之下，受固有必然性的指引，才能获得具有科学价值的结果。

伯克霍夫（George David Birkhoff），美国数学界的泰斗，在1943年的《科学美国人》上提出了同样的观点：

> 我们寄希望于未来，越来越多的理论物理学家们能够更深刻地认识数学的原理；而数学家们也不再把自己局限于数学抽象的美学发展中。

辛格（John L. Synge），一位数学物理学家，在一篇颇具萧伯纳风格的技术长文的前言中描述了1944年的情形：

> 大多数数学家从事于一致认为是绝对数学的思想的研究，他们形成了一个封闭的行会，初入会时

必须发誓不逾越行规。他们通常遵守自己的誓言，只有少数几个数学家四处遛达，直接从其他科学领域中产生的问题中寻找动力。在1744年或1844年第二类人差不多包含了所有的数学家。在1944年这只是如此小的一部分，以致于有必要提醒大多数人，还存在着这样的少数人，并且解释一下这种观点。

这少数人并不希望被称为“物理学家”或“工程师”。因为他们遵循着一种包括欧几里得、阿基米得、牛顿、拉格朗日、哈密尔顿、高斯、彭加勒等人延续了20多个世纪的数学传统，这少数人并不希望贬损大多数人的工作，但确实担心，完全依赖于自己的数学会失去其意义。

与世隔绝的数学家们不仅把精力都用于整个数学的未来，而且剥夺了其他科学一直以来所依赖的一项支持……。正是在对自然界的研究中，才产生了（而且完全可能继续产生）比数学家们闭门造车创造出来的结构复杂得多的问题。科学家们一直依赖数学家来解决这些问题。他们知道数学家不只是一个已经造好的工具的熟练使用者——他们自己也可以相当熟练地使用这些工具；他们依赖的是数学家所特有的品质——他的逻辑上的洞察力和从一般中看出特殊及从特殊中找出一般的能力……。

在所有这些中，数学家是指向者，也是约束者。他给出了科学计算的方法——对数、微积分、微分方程等等——但他给的还远不止这些，他给出了一张蓝图，他坚持思维的逻辑性。每一门新的学科出现他都给它——或试图给它——坚实的逻辑结构，就像欧几里得对埃及人的土地丈量所做的。一门学科初到他手时像一块粗糙的石头，丑陋不堪，而离开他手时已是一块闪闪发光的宝石了。

现在，科学比以往任何时候都要活跃，并没明显的衰败迹象，只有最细心的观察者注意到看门人已擅离职守，他并没有去睡大觉，他像以往一样地努力工作，只是他在为自己干活……

简而言之，联盟已被打破——当它存在时曾是多么振奋人心……。自然界将会提出有力的问题，但它们永远到不了数学家那里。数学家可能正坐在象牙塔中等待着敌人的枪林弹雨，但敌人永远不会来到他面前。自然界不会为他提供现成的只等着公式化的问题。他们必须用锹和镐来挖，不愿让自己的双手沾上泥土的人永远也找不到它们。

思维中的变化和衰亡就像人类的变化和衰亡一样，不可避免，一个真正热爱真理的数学家是不会掩饰这一点的，人为的力量不可能激发出如此丰富的智力上的动机。有些东西富有想象力，有些没有；而如果没有，它们就没有激情。如果数学家们真的失去了他们曾经有过的普遍的联系，如果他们在精确逻辑的修正上比在星体的运动中更真实地看到上帝之手——那么任何试图诱使他们回到原来的地方的努力不仅仅是徒劳无功，而且是对个人智力自由的权力的否认。但每一个年轻的数学家，如果他有自己的哲学——每个人都有——应该充分地占有事实后再做决定。他应该意识到如果他遵循现代数学的模式，那么他将是一个伟大传统的继承人——但只是部分继承人。其他的遗产将落入他人之手，而他将再也不能得到它了……

我们的科学始于数学，而且必然在数学从中撤出不久之后（如果要撤出的话）结束。一个世纪之后将有更大更好的大规模的实验室。这些实验结果是单纯的事实还是成为科学要看它们与数学的实质

之间的关系的紧密程度了。

冯·诺依曼非常紧张地提出了警告，在时常被引用的论文《数学家》(1947年)中，他说：

> 当一门数学学科远离它的经验本源继续发展的时候，或者更进一步，如果它是第二代和第三代，仅仅间接地受到来自“现实”的思想所启发，那么，它就会面临严重困境。它会变得越来越纯粹地美学化，越来越纯粹地“为艺术而艺术”。如果在这个领域周围是互相联系并且仍然与实践经验有密切关系的学科，或者这个学科处于具有非常卓越的审美能力的人们的影响之下，那这种需要不一定是坏事。但是，仍然存在一种严重的危险，即这门学科将沿着阻力最小的途径发展，使远离本源的小溪又分散成许多无足轻重的支流，使这个学科变成大量混乱的琐碎枝节。换句话说，在距离经验本源很远很远的地方，或者在多次“抽象”的近亲繁殖之后，一门数学学科就有退化的危险。起初，风格通常是古典的，一旦它显示出巴罗克*式的迹象，危险信号就发出来了。……总之，每当到了这种地步时，在我看来，唯一的药方就是为重获青春而返本求源，重新注入直接经验的思想。我相信，这是使这门学科保持清新与活力的必要条件，即使在将来，这也是同样正确的。

但纯粹创造的趋势并没有减弱，数学家继续从科学中逃离出来，走他们自己的路。也许是为了自我安慰，他们轻蔑地称应用数学家为迟钝的工匠。他们抱怨说纯数学的甜美音乐尚未奏响便被技术的喇叭声淹没了。然而，他们也感到了必须面对上面所说的那些批评。某些直率者或是忽视或是故意曲解历史，他们分辩

* 17世纪欧洲的一种建筑风格，过分雕琢和怪诞。　——译注

说，过去的许多纯粹源于智力兴趣的重大创造，后来都被证明具有巨大的实用价值。让我们来看看这些纯数学家从历史上引证的所谓纯粹的例子究竟是怎样纯粹的？

最普通的例子是希腊人在抛物线、椭圆和双曲线上的工作。纯数学家认为希腊人，特别是阿波罗纽斯仅仅是为了满足数学上的兴趣才研究了这些曲线。而1800年开普勒发现椭圆恰好是用以描述行星环绕太阳运动所需要的曲线。虽然我们不了解圆锥曲线的早期历史，但权威的历史学家诺依格鲍尔（Otto Neugebauer）提出一种理论认为：它们源于日晷的建造工作。已知古代日晷使用了圆锥曲线的理论，不仅如此，圆锥曲线可以使光线聚焦的事实在阿波罗纽斯对之做出经典性工作很久之前就已为人所知了（见第一章）。物理学将圆锥曲线用于光学（希腊人为之付出了相当多的时间和精力的一门学科），自然推动了对圆锥曲线的研究。

在阿波罗纽斯以前很久，人们就试图通过研究圆锥曲线来解决倍立方体问题，即构造一个立方体，其体积是另一给定立方体的两倍。对希腊几何来说，这是一个重要的问题，即通过构造来证明存在性。

确实，阿波罗纽斯也证出了有关圆锥曲线上百条没有立即的或潜在的应用的定理。在这项工作中他与现代人并没有什么区别：发现一个有重大价值的论题并全力解决它，这样做的原因或是上面提过的，对一个有生命力的学科，希望了解得更多，或是当作智力上的挑战。

非欧几何是纯数学中第二个最经常提及的例子，并且后来也发现了它的应用。如果认为数学家们仅仅由于想要看看改变欧几里得平行公理将导致什么结果，因而创立了非欧几何，那么这个论断就抹煞了两千年的历史。欧几里得公理曾被认为是物理空间自明的真理（见第一章），然而，平行公理，尽管欧几里得对它的表述相当慎重和特别，以避免率直的平行线假设；却并不是自明的，这与其他公设有所区别。因此，寻求一个更容易接受的表述的众多努力最终导致人们认识到：平行公设并非必须为真，一个

不同的平行公理（结果是一种非欧几何）能同样好地表示物理空间。重要的一点是确认欧氏平行公理真理性的努力并不是“大脑思维的消遣”，而是一种保证几何真理性的尝试，正是这种真理性支承着应用数学中上千条定理。

纯数学家经常引用黎曼的工作，他将那时已知的非欧几何一般化，引入了大量的非欧几何知识，现在称为黎曼几何。这里，纯数学家也坚持认为黎曼创造了这种新几何主要是为了看看能够做什么。但他们的解释是错误的。正如我们所看到的那样，与先前的欧氏几何在表示物理空间性质上一样行之有效的非欧几何产生之时，数学家们试图证明欧氏几何的物理合理性的努力已达顶点。这个意外的事实产生了问题：既然这两种几何学大相径庭，那么真正的物理空间是什么？正是黎曼在1854年的论文里，为了回答这个问题而创立了更为一般的几何学。从我们有限的物理知识来看，它们在描述物理空间上如同欧氏几何一样有效。实际上，黎曼预言，空间和物质应当一起考虑，那么爱因斯坦发现了黎氏几何学的有效性还值得惊叹吗？黎曼关于几何学相对性的洞察并没有贬损爱因斯坦对于它的巧妙运用，它的适用性是数学家们一直在从事的基本问题，是物理空间实质的研究结果。

也许还应考虑一个例子。现代数学中很活跃的一门分支是群论，纯数学家们探求其内涵。群论主要由伽罗瓦创立，尽管在这以前，拉格朗日和鲁菲尼（Paolo Ruffini）也做过工作。伽罗瓦所处理的问题实际上是数学上最简单最实际的问题，即简单的多项式方程，如下面的二次方程

$$3x^2+5x+7=0,$$

三次方程

$$4x^3+6x^2-5x+9=0$$

以及更高次方程的可解性。这种方程是从大量物理问题中产生的。数学家们在伽罗瓦时代就成功地解决了一至四次方程。阿贝尔证明了不可能用代数方法解出一般形式的五次或更高次方程，如

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

其中，a，b、c，d，e，f是任意实数或复数。伽罗瓦接着开始证明为什么五次或更高次的一般方程不可能用代数方法求解。在他的工作中，他创立了群论。从多项式方程求解这么基本的问题中发展起来的学科可适用于许多其他的数学和物理问题，这又有什么可惊奇的？当然群论不是独立于实际问题而产生的。

而且，群论的动力并不仅仅建立在伽罗瓦的工作之上。纯数学家们似乎忽略了布拉维（Auguste Bravais）关于晶体，如石英、钻石、宝石的结构的工作。这些物质是由不同的原子通过某种方式在晶体中不断重复排列而成的，并且晶体如食盐和普通矿物，都具有非常特殊的原子排列形式。例如在最简单的情形中，原子虽然是邻接的，但却可以认为它们处在一个立方体的顶点上。从1848年起，布拉维研究了一种晶体绕另一种晶体的某个轴旋转、平移及关于某个轴的反射能变换成本身的所有可能变换，这些变换组成了各种形式的群。约当（Camille Jordan）注意到了布拉维的这项工作并在他自己1868年的论文中扩展了它，在他最有影响的《置换专论》一书中把它归入有限群研究的其他动因之一。

布拉维的工作也提示了约当去从事关于平移和旋转的无限群研究。1872年，F·克莱因在论文中将无限群学科提到重要的位置上来，他把当时已知的不同几何依据在几何中可能的运动群以及在这些运动中仍保持不变的性质来划分。欧氏几何研究的是在旋转、平移以及相似变换条件下仍保持恒定的图形性质。这个区分各种已知几何，以及哪一种几何适合于物理空间的研究工作——那时在数学家的心目中是最重要的问题，没有被视为纯粹数学问题而不予考虑。更多的一些工作则涉及无限连续群和不连续群，以期找到求解微分方程的方法。它们比19世纪90年代中形成的抽象群的现代观点更早地进入了数学领域。*

对于那些宣称为纯数学产物的学科——如矩阵理论、张量分

* 凯莱，曾在1849～1854年间的论文中提出了抽象群的定义。但在得到更多的具体应用之前，这一抽象概念一直未得到首肯。 ——原注

析和拓扑学——的研究都揭示了同一问题。例如，现代抽象代数都起源于哈密尔顿创立的四元数（见第四章），其动机是直接或间接的来自物理，而涉及的人则是与数学应用息息相关。换句话说，那些声称是作为纯数学而创立的学科后来都被发现实为应用性学科。而且，历史事实证明，它们都是在研究实际的物理问题或直接与物理问题有关的问题中产生的。常有这种现象产生，最初由物理问题所引发的完善的数学产生了不曾预见的崭新的应用。从而，数学对科学的作用其实是一种还债行为，这种应用是可预料的。本来设计为砍伐木头用的斧子也可以用来将钉子敲入木块，对此我们会感到吃惊吗？数学理论之所以会在科学上有意想不到的应用，是因为它立足于物理基础，而决非因为那些苦思冥想的天才数学家们的预言性的洞察力。这些层出不穷的成功应用决不是偶然的。

哈代是英国数学界的领袖人物，据说他曾做过这样的祝酒词："祝纯数学永无用处。"迪克森，芝加哥大学的一位权威，经常说："感谢上帝，数论毫无用处。"

二战时期，哈代在一篇关于数学的文章中写道：

> 我所说的"数学"，意味着真正的数学，即费马、欧拉、高斯和阿贝尔的数学，而不是在工程实验室里沾上数学边儿的东西。我并不只考虑"纯"数学（尽管我最关心的自然是这个问题），我认为麦克斯韦、爱因斯坦、爱丁顿、狄拉克也是"真正"的数学家。

从以上这段话（哈代在《一个数学家的自白》中也重述过）我们可以看出，哈代至少愿意接受一部分应用数学。但他又接着说：

> 我把具有永恒的美学价值的数学知识体系都包括在内，比如说最完美的希腊数学，它是永恒的，因为它最好的部分就像最好的文学作品一样，在几千年后仍不断激发千百万人的满足感。

哈代和迪克森可以就此而止，因为对他们已有了盖棺定论。他们的纯数学和其他所有为其自身目的而创立的数学一样，几乎肯定没有什么用处。然而，有用的可能性并非不存在。一个在画布随意涂鸦的孩子也许可以匹敌米开朗琪罗（虽然更可能是现代艺术）。而且，正如爱丁顿所指出的，一个乱敲打字键盘的猴子也许会创作出可与莎士比亚相媲美的作品。实际上，在成千上万的纯数学家的工作中可能会偶然得到有用的数学成果，就好像在大街上寻找金币的人有可能会捡到硬币。但是，没有与现实相融汇的智力努力几乎可以肯定是没有结果的。正如伯克霍夫所指出的："也许，由物理暗示的新数学发现才总是最重要的，因为，从一开始，自然就决定了数学这一自然的语言所必须遵循的模式与道路。"然而，自然并没有大声炫耀这一秘密，她总是喃喃低语。数学家们必须仔细聆听才能将其放大宣扬。

尽管历史事实摆在那里，但仍有一些数学家肯定纯数学的未来应用，实际上，他们宣称将纯数学脱离于科学将使前程更为远大。斯通（Marshall Stone）、哈佛、耶鲁和芝加哥大学的一位教授，不久前（1961年）重申了这一论点。他的《数学革命》一文在赞扬了数学在科学中的重要性以后，接着写道：

> 从1900年以来，我们对数学的概念或者说有关的一些观点已发生了一些重要变化，但是真正涉及到思想变革的还是发现它是完全独立于物质世界的……。虽然思维产生于大脑这样的论断隐含着某些含糊和神秘的东西，但除此以外，数学看来与物质世界并没有必然的联系。毫不夸张地说，这个发现标志着数学史中一个最具意义的智力的进步。……
>
> 当我们再来比较一下今天的数学和19世纪末的数学时，我们会惊奇地发现我们的数学在数量和复杂程度上的飞速发展，但同时我们也应注意到这些发展与强调抽象概念、与对广泛的数学模型的观察与分析之间存在着密切的联系。其实，通过进一

> 步的研究，我们发现只有把数学与其应用分离开来，才会产生这种新的发展方向。在本世纪内，这个方向已成为其旺盛生命力和发展的真正源泉……
>
> 现代数学家将会赞同这一观点，即其学科的特点是研究一般抽象体系，每一体系都是由规定的抽象元素所组成，并通过任意的但却有明确规定的内部联系组织建立起来的……。因为数学只有脱离过去那种必须束缚于现实的某一方面的状况，才能成为我们用于打碎枷锁的极端灵活的有力的工具。证明这一论点的例子不胜枚举。……

接着，他又提到了遗传学，对策论以及通迅的数学理论。而实际上，这些都不能使他自圆其说。这些理论都是通过合理应用经典数学得到的。

1962 年，在《工业与应用数学评论》刊出的一篇文章中，库朗反驳了斯通的论点：

> 斯通认为我们生活在一个拥有伟大数学成就的时代，这一成就是前所未有的。“现代数学”的胜利归功于一个基本原则：抽象和数学从物理等学科中有意识地分离，从而数学思维犹如摆脱了沙囊的氢气球，渐渐升高，地面上的一切尽收眼底。
>
> 我无意贬低或歪曲这位名人的论断和这番说教，但作为一个总括性的断言，作为一个试图给研究，尤其是给教育打上框框的观点，这篇文章似乎是一个危险的信号，并且当然需要增补。热情的抽象主义并未胡说八道，而仅鼓吹些半截子真理，这一点倒也缓解了这个时髦东西的危险。仅代表一个方面的半截子真理是不能将平衡整个真理的其他各个至关紧要方面一扫而光的。
>
> 当然，数学思维是通过抽象概念来运作的，数学思想需要抽象概念的逐步精炼、明确和公理化。在

> 结构洞察力达到一个新高度时，重要的简化工作也变得可能了。毋庸置疑的是——长期以来人们也一直明确强调这一点——如果人们摒弃了这种形而上学的偏见，即认为数学概念应做为对某种实际现实的描述的话，数学的基本困难将不复存在。
>
> 然而，科学赖以生存的血液源于其根基又与所谓的现实有着千丝万缕的联系，这个“现实”可以是力学、物理学、生物形态、经济行为、大地测量学，也可以是有关的其他类似领域的数学实体。对数学来说，抽象化和一般性并不比单个现象的特征更重要，尤其不如归纳的直觉知识。只有这些力量之间相互作用以及它们的综合才能保证数学的活力。我们必须与把数学单方面推向矛盾的极端行为作斗争。
>
> 我们不能接受数学的终极标准是“人类理性的光荣”这一陈词滥调，不允许把数学分割为“纯的”和“应用的”两派。它们都只能而且必须是科学的洪流中不可缺少的一股，不允许分出一条细流，让它消失在沙滩里。
>
> 分化的倾向是数学中固有的，这是个时刻存在的威胁。狂热的孤立抽象主义者确实是危险的，但不区别对待空洞的假象和精妙的灵感的传统保守分子也是危险的。

库朗没有否定抽象概念的价值，但是，他在1964年写的一篇文章中认为数学必须从具体的特定实体中汲取动力，以达到现实的某个层次。如果一架飞机进入抽象的高空是必要的，那么它并不是为了逃离尘世，即使飞行员不能控制好返回的全过程，它仍然会重新回到地面。

数学常被比作一棵大树，它的根深深地扎于肥沃的自然土壤中，它的主干是数字和几何图形，从主干上生长出的许许多多的

分支代表着发展。有的分枝茁壮兴旺，繁衍了许多有生命力的后代，有的却只有些微不足道的后代，对整棵树贡献甚少，还有的则已死去。但最有意义的却是这棵树扎根于坚实的土壤，每一分枝都经过根和主干从现实中汲取养料。现在人们试图把土壤全部移去而维持树根、主干以及枝条的生存，是办不到的。只有根不断地向肥沃土壤的更深处发展，这许许多多的枝条才可能繁茂。妄图在其上嫁接没有现实做养料的新枝条只能产生毫无生命力的木棍。而少数可能的枝条通过人们足够的努力，或许会以假乱真，混杂在有生命的枝条中，并且看起来像是从主干上长出来的，但实际上它们是死的，不费吹灰之力就能折去而不会对大树生长产生任何副作用。

斯通认为自由地探索纯数学将会为应用数学加强和提供新的方法，但是其他一些论点似乎暗中破坏了斯通的观点。研究纯数学，不管其水平如何高，研究者如何杰出都势必会削弱人们将数学推理应用于实际情况的动力。如果人们致力于抽象数学，就不可避免地受到纯数学氛围的影响，并被那种为了很好地研究它所需的心情所左右。这样，人们也就没有更多时间去了解它在应用上的需求，去制造处理应用问题的数学工具。应用数学家注意抽象数学家追求和获得的成果是有益的，但过多的注意是不好的，它会分散精力。无视应用将导致整个数学的孤立甚至可能是萎缩。

从历史证据来看，斯通当然错了。正如冯·诺伊曼在《数学家》（1947年）一文中所指出的那样：

> 无可否认，数学上某些最了不起的灵感，那些想象之中纯得不能再纯的数学部门中的最好的灵感，全部来源于自然科学……。在我看来，最能从根本上表明数学特点的事实是它和自然科学非常特殊的关系，或者更一般地说，是它和任何一种科学的非常特殊的关系，只要这种科学在解释经验时不限于单纯描述事实。

一流的法国数学家许瓦尔兹毫不犹豫地认为当代最活跃的分

支——抽象代数和代数拓朴，毫无应用价值。一些论文用这些领域的语言和概念装扮得貌似有实用性，实际上却无助于解决实际问题。

然而，纯抽象数学的支持者并不妥协。杰出的分析学家狄多涅教授在1964年写的一篇文章中反对这种认为自给自足的数学会因为缺乏养料而停滞不前的主张：

> 我想强调的是，近来的事实并不像那些伪善的预言家的陈词滥调那样，他们再三告诫我们，数学脱离其应用性和其他科学必将出现灰暗前景。我并不是说，数学与其他科学的紧密联系（如理论物理学）对所有部分毫无益处；但很清楚的是，我所提到的所有令人震惊的发展，除了广义函数论这一可能的例外以外，没有一样与物理应用有关。甚至在偏微分方程理论中，人们也更多地强调其内在的和结构的问题，而不是有直接物理意义的问题。即使把数学与其他人类奋斗的渠道强制隔绝，也会有足够维持若干世纪的精神粮食使我们能够解决科学中仍必须解决的重要问题。

尽管狄多涅本可以看到纯数学中无尽的问题，但公正地说，他并未收回前言，即任何纯数学的产物终将有其实用性。他引证了许多对纯数学，特别是对数论的研究，对此，他说："真是不可思议，这些结论竟能应用到任何物理问题中。"此外，尽管他为纯数学辩护，但他也认为数学家们鼓吹纯数学对科学的价值"有那么一点欺骗的意味"。他指出，纯数学家可以不辞辛苦地证明问题的解的唯一性，却不去求解。物理学家知道解的唯一性——地球不沿两种轨道运行——而他则力图找到实际的轨道。

在探求纯数学价值问题上，另外一个同样有地位的纯数学工作者嘉丁（Frank Lars Garding）在1958年国际数学家大会上，实事求是地说：

> 我无法深入研究数学的许多重要分支，如微分

方程、系统论以及量子力学和微分几何的应用。我的专业是偏微分算子的一般理论。它源自经典物理，但对经典物理却没有什么真正重要的应用。物理学是有意义的问题的重要来源，我感到我所泛泛而谈的内容也许还不如对那些未解决的物理问题来个例行回顾有用，这些问题似乎需要新的数学技巧来解决。对专家来说，这一回顾当然不是什么新鲜内容，但仍能为许多数学家提供有价值的问题。很少有人通过有计划的努力来促进物理与数学的联系，这应该是国际数学会议的主要议题之一。

吹嘘纯数学可以脱离现实世界而存在的人坚持认为总有一天他人会认识他们现在所做的无意义的努力，但他们只能是在自己的精神天地奋斗。他们违背了整个历史的进程。他们以为不受科学限制的数学能够产生更丰富多样、更富成果的论题，这些论题的应用将远胜于过去的数学，但这只是空谈。

纯数学的支持者可以也确实这么要求人们承认他们的成果具有内在美学价值和智力挑战性，这些价值不可否认。然而，他们对纯数学的巨大贡献却是值得怀疑的。且不考虑在这个问题上的任何定论，这些价值并未对数学主流即对自然的研究作出什么贡献，美学价值和智力挑战性是为数学而数学的。这些内在价值所得到的肯定，显然多于目前有关数学孤立性的讨论所达的共识。

纯数学的支持者与批评者之间显然在相争，他们作了不少或幽默或挖苦的评论。应用数学家们并不关心严格的证明。对他们来说，演绎推理与物理事件的一致性才是最重要的。其中，代表人物是亥维赛（Oliver Heaviside）。他使用了纯数学家看来是不合理的、怪异的技巧，因此，他遭到了强烈的抨击。亥维赛瞧不起那些他所谓的“逻辑伐木工”。他说：“逻辑可以容忍，因为它是永恒的。”后来他使纯数学家目瞪口呆。当时，发散级数是非法的，而亥维赛在遇到某个特殊级数时却说：“哈！级数是发散的，现在我有办法了。”结果表明，亥维赛的技巧是完全严格化的，并且还

提供了新的数学论点。为了激怒纯数学家，应用数学家还宣称，纯数学家能发现任何求解中的困难，而他们则能对任何困难求解。

应用数学家再一次地嘲弄纯数学家：应用问题是由物理现象提出的，有关的数学家们应该去解决它，而纯数学家却在创造他们自己的问题。应用数学家称纯数学家是一个在昏暗的大街上掉了钥匙的人，他只跑到路灯下面找，因为那里更亮一些。

为了进一步贬低对手，应用数学家讲了另一个故事。有个人有一大堆衣服要洗，于是到处找洗衣店。他发现一家店的窗口上挂着一块招牌："此处洗衣"，就走了进去，把他的一堆衣服放在柜台上。店主看上去有点吃惊，问："这是干什么?"他答道："我来洗衣服。""但这里不洗衣服，"店主回答道。这次轮到这个人吃惊了。他指着牌子问："招牌怎么写的?""哦，"店主说："我们是造招牌的。"

纯数学家和应用数学家的论战不断继续，既然现在纯数学家占了上风，他们就可以鄙视那些误入歧途的同行，可以责骂他们了。正如特鲁斯德尔（Clifford E. Tnuesdell）教授所指出的："对于自认为是'纯'的数学家来说，'应用数学'一词是对那些他们认为是不纯的数学家的羞辱。……，然而，'纯'数学家否定数学发展源于人类感知，这只是小孩子对大人发的忤逆脾气。他们把'纯'数学做为一个切口以摒弃一切不纯的东西。所有这些，都使它成为上个世纪创造的一个人为的灾难。……"不对它所服务的客观对象加以考虑，势必导致它的自我终结。纯数学本身不是一个至福境界。数学的目的在于发现值得了解的事物，但是，按照目前的情况，研究导致了研究，由此又导致了研究。在今天的数学殿堂中，已没有人敢问及意义和目标。数学不能被现实的俗物所沾染，厚厚的象牙塔挡住了深居其间的学者的视线，而这些与世隔绝的头脑也满足于孤立的境地。

数学家们在争论不休，而物理学家和其他科学家却只能悲叹，因为他们在危难时被舍弃不顾。让我们听听著名的斯奈特（John C. Slater）教授的意见，他是麻省理工学院的教授：

> 物理学家从数学家那里受益甚微，每出现一个像冯·诺依曼意识到的这些问题（前面所描述的）并对此做出实际贡献的数学家，就有二十个对此不感兴趣的数学家存在。这二十个人的工作或是与物理相去甚远，或是仅强调数学物理中那些陈旧的或广为人知的东西。无怪乎在这种情况下，物理学家看数学家总感到他们脱离了通向过去的数学高峰的路径，并且感到他们只有坚决地投身于数学物理学的发展主流，才能重新回到这条路上，取得数学发展的丰硕成果……物理学家们深深地感到，这才是今天的数学家们取得成就的唯一途径。

1972年，戴森（Preeman J. Dyson）教授在对数学家们所做的一次重要演讲中，把对科学的忽视做为中心议题加以讨论。这位声名卓著的物理学家指出，在过去和现在，数学家们有许多参与研究重要的科学问题的机会，但却都放过了。有些问题或问题的某些部分与数学丝丝相扣，可是数学家不明白其起源与物理意义，因而他们漫无目的，也不知道自己得到了些什么。正如戴森所指出的那样，数学与物理的联姻已宣告结束。

这个世纪以来，数学从科学中的分离不断加速，现在常可听到和谈到数学家们关于独立于科学的论调。数学家们现在已经可以毫不犹豫地、随随便便地说，他们只关心数学本身，而对科学没有兴趣。虽然没有精确的统计，但今天活跃在数学舞台上的数学家中，约有90%的人都无视科学并且陶醉于这种至福境地。尽管有历史的佐证和一些反对之声，但是，抽象主义趋势，为了一般化而一般化的趋势以及研究随意选择的问题的趋势愈演愈烈。说什么这是为了更多的了解具体事例而研究一整类问题的合理需要，是为了得到问题的实质而进行抽象化的合理需要，都不过是一个借口，他们的目的只是为了研究一般化、抽象化。

若干世纪以来，人们创立了像欧氏几何、托勒密理论、日心说、牛顿力学、电磁学理论以及近来的相对论和量子论这样的宏

伟体系，在所有这些科学以及其他重要的科学体系中，数学被认为是建筑方法、框架乃至本质。数学使我们认识了些许自然，将变化纷纭的现象容括在可理解的解释中。数学理论揭示了人们所认识的自然的秩序与规划，使人们具有统治或部分统治大片领域的能力。

但多数数学家却抛弃了他们的传统和遗产，自然发生的秘密信息现在遇到的只是些紧闭的双眼和迟钝的耳朵。数学家们躺在先辈的功劳薄上，幻想依靠昔日辉煌获得喝彩与支持。纯数学家则陷得更深，他们把应用数学家从同行会中驱逐出去，妄想垄断数学家这个令人景仰的头衔，从而独自攫取先人的名誉。他们丢弃了丰富的思想之源，花费着先人积累的宝贵财富，他们正沿着一丝微光走出这个世界。但确实有些人注意到了曾促进数学发展的光荣的传统，维护了牛顿和高斯应有的荣誉。他们仍坚持从他们的数学研究中发掘出对科学的潜在价值。他们虽声称要为科学创建模型，但并未为此奋斗。实际上，因为大多数数学家不懂科学，他们不可能创建出模型。他们宁可保持童贞，也不愿与科学同床共寝。从整体上看，数学在自陷；在自给自足；而且从过去的情形判断，现代数学研究的大部分都不可能会为科学发展作出贡献。数学现在几乎成了一个自我封闭的体系。它根据自己评判现实意义和完美性的标准来决定自己的前进方向，它甚至满足于自己与外界的问题、动力、灵感相隔绝的状况。数学已不复再有统一性和目标。

当今大多数数学家的孤芳自赏令人扼腕，这里有许多原因。数学的科技应用在飞速地发展着。到了今天，笛卡尔的先见似乎更近于事实：数学代表的是人类智慧的最高成就，代表着推理对经验主义的胜利，代表着基于数学的方法论将永远覆盖所有的科学领域。而正当数学方法逐渐用于如此众多的领域时，数学家们却缩到了一个角落里去了。虽然一百年或更早以前，数学和物理学是密切相关的（当然只是精神上的神往），但从那时起它们开始分离，至今已很明显。数学是有价值的，因为它对人们理解和征服

自然作出了贡献。而这一事实已被忽略，当代多数数学家希望将其学科分离出来做单独研究。数学家们分裂成两派，一派忠实于前人以及他们那种可敬的数学研究动机，这种研究动机在过去已结出了最丰硕的果实；而另一派，则在风中游荡，研究那些可能触发他们想象力的东西。多数数学家被一个世纪以来愈发变纯的数学所蒙蔽，已经丧失了理解自然界的能力和愿望。他们转向抽象代数和拓扑学这些领域，转向抽象化和一般化（如泛函分析），转向远离实际应用的微分方程的存在性证明，转向各种思维体系的公理化和枯燥的智力游戏。只有少数人仍在试图解决比较具体的问题，值得注意的有微分方程及相关领域。

大多数数学家对科学的抛弃意味着科学将失去数学？全非如此。少数明智的数学家已经看到，未来的牛顿、拉普拉斯和哈密尔顿将创造出他们所需要的像过去那样伟大的数学。这些人虽名为数学家，实际上却是物理学家。1957 年在理利奇（Franz Rellich）的讣告中，库朗写道，如果现在的倾向继续发展下去，“有这样一种危险，未来发展‘应用’数学的将是物理学家和工程师，挂着职业数学家头衔的人将与此无关。”库朗之所以在“应用”一词上打上引号，是因为他实际上意指所有重要的数学。他并不把纯数学和应用数学分开。

库朗的预言正在变成现实。因为数学机构的建立就有利于纯数学，而最好的应用成果现在都是电子工程、计算机、生物学、物理学、化学和天文学方面的科学家做出的。正如格列佛在往飞岛*之行中所见到的数学家们那样，纯数学家们生活在悬空的岛上。他们把地球上的社会问题推给别人。这些人也许会在前人为这门学科所提供的空气中呼吸上一阵子，但他们最终注定要消失在真空中。

塔里朗德（Talleyrand）曾指出，理想主义者无法持久，除非

* 飞岛，拉普他岛（Laputa）。《格列佛游记》中的一个飞岛，岛上居民多幻想而不务实际。　——译注

他是一个现实主义者，而现实主义者也无法持久，除非他是一个理想主义者。这句话用于数学，就是要把实际问题理想化，进行抽象研究，同时理想主义者的工作如果脱离现实是不会长久的。数学家们既要脚踏实地，又要高瞻远瞩。在抽象概念与具体问题的相互作用中才会产生出有生命的、重要的数学。数学家也许喜欢飞翔于抽象思维的高空，但他们像鸟儿那样必须要回到地面觅食。纯数学就好像饭后的茶点，开胃甚至多少能滋养一下身体，但人不能只靠茶点过活，他还需要肉和土豆（现实问题）做为基本营养品。

危险在于人们过多地注重人为的问题，如果照目前这种强调纯数学的趋势发展下去，那么未来的数学将不再是原来人们所推崇的数学，它只是徒有虚名而已。数学是一个卓越的创造，其卓越处在于人的思维能力，它能就复杂而看似神秘的自然现象建立其可被理解的模型，从而给人以启迪与力量。

然而，个人有选择自己道路的自由。荷马在《奥德赛》中讲："不同的人有不同的快乐方法。"一个世纪后，诗人阿基罗克胡斯也说："每个人都按自己的方式使自己快乐。"哥德同样认为："对个人而言，投身于有吸引力的，对自己有益的职业是每个人的自由。"但他又补充道："对于人类而言，合适的研究是研究人本身。"在这里我们可以解释为：对数学家而言，合适的研究就是研究自然。正如培根在他的《新工具》中所说，"科学真正的、合理的目的就是赋予人类生活以新的创造和财富。"

归根结底，我们必须明确，什么研究才是值得追求的。数学界所应该关注的，并不是纯数学和应用数学之间的差异，而是有着正确目标的数学和那些以满足个人目的与一时之兴为目标的数学之间的差异，是有意义的数学和无意义的数学之间的差异，是重要的和无足轻重的数学之间的差异，是充满生机活力的数学和死气沉沉的数学之间的差异。

第十四章　数学向何处去

孱弱无能的理智啊，你该有自知之明！

——帕斯卡

数学家们在试图决定什么是真正的数学，以及在进行新的数学创造时，应当以什么作为基础，其困惑与日俱增。我们前面的长篇大论揭示出数学当前的困难处境，甚至连数学家们的唯一安慰，即数学对科学的巨大适应性，也不复存在了。因为大多数数学家已经放弃了应用，进退维谷，何去何从？数学家们还指望什么？数学的本质又是什么？

首先，让我们回顾一下数学是如何落到这步田地，其中根本性的问题又是什么。最早创建数学的埃及和巴比伦数学家根本不会有能力预见到他们会建立一个什么样的结构，因此他们没有打下一个坚实的基础，而是直接建立在地面上。那时，地表看起来似乎就提供了一个可靠的基础，他们用来建造数学大厦的材料，即关于数学和几何图形的事实，取自关于土地的一些简单经验。现

在我们对术语几何，即土地测量的不断使用就点出了数学的这个起源。

就像一座建筑，其晃动会随着高度增加而愈加明显，而在其上随意添加东西则更加危险。古希腊人不仅看到了这种危险，而且也进行了必要的重建，他们采用了两种方法。头一种方法是选一块坚实的地面，大厦就建在其上，这块坚实地面就是关于空间和正整数的自明真理。第二种方法是把钢筋加入框架之中，这些钢筋就是数学大厦结构中每一部分的演绎证明。

在古希腊时代数学发展的范围内，数学的结构（主要由欧几里得几何构成）被证明是稳固的。暴露出的一个缺陷是：考虑一个直线段，比如说一个直角边为一个单位长的等腰直角三角形的斜边，它的长度是 $\sqrt{2}$ 个单位。因为希腊人只承认正整数，不会接受 $\sqrt{2}$ 这样的怪物。他们通过排斥无理数，通过放弃给线段、面积和体积赋予数值的想法摆脱了这种困境。因此，除了整数和可以归入几何学结构的那些以外，他们对算术和代数的发展没有什么贡献。确实，亚历山大里亚时期的希腊人，尤其是阿基米得，确实使用过无理数，但是这些并没有归入数学的逻辑结构之中。

印度人和阿拉伯人为数学大厦增加了新的一层，但他们对大厦的稳固性却充耳不闻。首先，大约在公元 600 年，印度人引入了负数。接着，不像希腊人那样挑剔的印度人和阿拉伯人不仅接受了无理数甚至还搞出了一套关于它们的运算规则。文艺复兴时期的欧洲人在最初接受希腊人、印度人和阿拉伯人的数学时还畏缩不前，然而，科学需要胜过一切，欧洲人克服了他们对数学逻辑上的合理性的焦虑。

通过扩展关于各种数的数学，印度人、阿拉伯人和欧洲人为数学大厦建造了一层又一层：复数，各种代数，微积分，微分方程，微分几何以及许多的学科。然而，他们用直觉和物理论据构成的木质栋梁取代了钢筋，但这些材料被证明不堪重负，而墙上裂缝已开始出现。到 1800 年，数学大厦再度告危，数学家们又赶紧用钢筋来替换木头。

当数学大厦的上层建筑得以加强之时，其基础——希腊人所选定的公理——却开始塌陷。非欧几何的发明揭示出欧几里得几何公理并非真正坚实的土地，只不过在表面看起来似乎坚实，非欧几何的公理也是如此。数学家们过去认为的自然的真实性——他们相信他们的头脑会对这种认识给出成功的证明——也被证明为不可靠的感觉。更添乱子的是，新的代数学的创立使得数学家们意识到数字的特性比几何的特性并不更真实一些。这样，整个数学大厦包括算术及其扩充：代数与分析就岌岌可危了。现在，高耸入云的数学大厦面临着即将崩溃和沉入沼泽中的危险。

为使数学大厦免于倾覆，就得采取强有力的措施，数学家接受了这个挑战。很清楚，没有能把数学建于其上的坚实土地，因为自然界看起来坚实的地面已被证明是骗人的。但也许能通过建立另一种类型的坚实基础来使大厦变得稳固，这包括精心措词的定义，一整套的公理和所有结论的精确证明，而无论凭直觉看来它们是多么地明显，还须用逻辑上的相容性取代真实性。各种理论相互之间应该紧密衔接，这样整个大厦将会稳如泰山（见第七章）。通过 19 世纪后期的公理化运动，数学家们似乎拥有了一座稳固的大厦。因此，虽然数学事实上已经失去其基础，数学却又一次度过了难关。

不幸的是，这种新结构的基础所用的水泥并没有很好地固化，建造者并不保证其坚固性。当集合论的矛盾暴露出来后，数学家们认识到他们的工作面临一个更严峻的危机。当然，他们不打算袖手旁观，坐视几个世纪的努力毁于一旦。因为坚固性依赖于为推理所选定的基础，很明显，只有重建全部基础才能挽大厦于将倾。在重建后的数学基础上，逻辑和数学公理都必须加强，因而建造者们决定将基础打得更深些。不幸的是，在以什么方式，在什么地方加强基础这一点上，他们没能达成一致。每个人都认为自己能确保坚实性，每个人都想按自己的方式重建。结果是产生了一片既谈不上巍然，又无坚实基础，无规无矩，四处展翼的危房，每一翼都自称数学的唯一殿堂，每间房屋都藏有数学思想的

奇珍异宝。

我们年少的时候肯定读过七个盲人和大象的故事，每个人摸到了象的不同部分，由此得出了自己关于大象的结论。数学，也许可以说是一种比大象更优美的结构，对于从不同角度观察它的基础建造者来说，呈示出不同的知识体系。

因此，数学发展到了这样一个阶段，逻辑主义、直觉主义、形式主义和集合论公理化主义，哪一种可以被合适地称之为数学，人们各执己见，而且，每一种数学结构都有某种程度上截然不同的上层建筑。因此，直觉主义者在他们应该接受什么作为基本的、合理的直觉问题上意见不一致：仅仅只有整数还是也包括一些无理数？排中律只适用于有限集合还是也可用于可数集？还有构造性方法的概念问题。逻辑主义者则单一地依赖逻辑，而且对于可约性公理、选择公理及无穷公理还怀有疑虑。集合论公理化主义者则可以沿几个不同方向中的任一个前进，这取决于他们对选择公理和连续统假设的取舍。甚至形式主义者也能遵循不同的路径，其中一些有别于将用于建立相容性的元数学原理。希尔伯特所倡导的有穷性定理不足以证明即使是一阶谓词的相容性，更不用说去建立希尔伯特的形式数学系统的相容性了，因此，用到了非有穷的方法（见第十二章）。还有，在希尔伯特所界定的范围内，哥德尔证明任何有意义的形式系统都包含不可判定的命题。它们是独立于公理之外的，我们可以以这样的命题或者它的反命题作为补充公理。然而，在完成了这种选择后，按哥德尔的结果，这个扩大了的系统仍包含不能判定的命题，因而又可以再进行一次选择。事实上这个过程可以无限进行下去。

逻辑主义者、形式主义者和集合论公理化主义者都依赖于公理化的基础。在本世纪头几十年中，这种基础被拥为建立数学的可以选用的基础。但是哥德尔的理论表明，没有一个公理体系可以包含属于任何一种结构的所有真理，勒尔海姆-斯科伦定理则表明每一个体系包含的真理比预计的要多。只有直觉主义者才能不在乎公理化的方法所提出的问题。

所有这些关于哪个基础最好这一问题的不一致和不确定性以及缺乏相容性的证明，就像达摩克里斯之剑*一样悬在数学家头上。无论一个人接受哪种数学哲学，他都冒着自相矛盾的危险。

对数学大厦这几种相互抵触的方法揭示了这样一个主要事实：不是只有一种而是有很多种数学，数学这个词应从多种意义上进行理解，也许可用于任何一种方法。哲学家桑塔亚那（George Santayana）曾经说过，"不存在什么上帝，上帝也是凡夫俗子。"今天，人们可以说，不存在这样一种被普遍接受的科学，而希腊人是其奠基者。事实上，数学家现在所面对的选择多样性可以用雪莱的诗句来描述：

看啊，
在这无边无际的荒原上
思维之翼究竟栖身何方。

很显然，我们还得生活在可预见的未来，其中对所需要的数学是什么并无定论。

关于什么是真正的数学，有许多截然不同的观点。如何使它们一致起来的任何希望——最起码也应使得关于什么是合适的数学发展方向这一问题的众多观点相互调和——在于看清楚是什么问题迫使数学家们接受不同观点。最基本的问题是什么是证明，然后是对于这一问题不同观点的后果，在什么是合理的数学上也有些不一致。

数学证明曾被认为应该总是一个清晰明确、无可辩驳的过程。确实，这一点已被忽略了几个世纪（见第五～八章），但数学家们总体来说还是知道这一事实的。概念就摆在那里，它一直是数学家们或多或少有意识坚持的标准和范例。

是什么引起人们对证明过程的关注，甚至于互相矛盾呢？过去的逻辑观点被普遍接受了两千年，其中由亚里士多德所限定的各种原理都是绝对真理。长时期的似乎可靠的应用使人们对其正

---

* 源出古希腊神话，喻大难临头。　——译注

确性信心十足。但是数学家们逐渐意识到这些逻辑原理和欧几里得几何公理一样，都是经验的产物。因此他们对什么是合理的原理开始感到不安。这样直觉主义者觉得应该限制排中律的应用，如果过去没有证明逻辑原理是不变的，我们还会认为现在正确的原理将来也一定如此吗？

在逻辑学派创始后，提出了关于证明的第二个问题：逻辑原理应该包括什么？虽然罗素和怀特海毫不犹豫地在他们的《数学原理》首版中引入了无穷公理和选择公理，他们后来还是理所当然地退缩了。他们不仅承认了逻辑原理不是绝对的真理而且承认了这两个公理不是逻辑公理。在《原理》的第二版中，开头就没有列出这两个公理，而需要用它们来证明一些定理的地方都特别地指了出来。

除了关于什么是可接受的逻辑原理这一问题的不同观点之外，逻辑本身能有多大用处这一问题也在争论之中。我们知道，逻辑学家们坚决主张逻辑足以满足全部数学的需要，然而，就像刚提到的那样，他们后来在无穷公理和选择公理的问题上含糊其辞。形式主义者认为只有逻辑是不够的，为了奠定数学的基础，还得在逻辑公理中加入数学公理。集合论公理化主义者则对逻辑原理漫不经心，有些人甚至不愿提及它们。原理上的直觉主义者干脆省略了逻辑。

还有一个问题是存在的概念。例如，证明每个多项式方程至少有一个根的过程就建立了一个存在定理。任何证明，如果是相容的，就可以为逻辑主义者、形式主义者和集合论公理化主义者所接受。然而，即使一个证明不用排中律，它也不会给出计算存在量的方法，因此，这种存在性证明对直觉主义者来说是难以接受的。直觉主义者也不愿意接受超穷基数和超穷序数，因为它们对人的直觉来说并不明显，而且也不能在直觉主义者的构造性或可计算性意义上得到。这是关于什么构成存在这一问题的不同标准的又一个例子。这个问题，即在什么意义上不仅个体，比如说一个方程的一个根的存在，而且整个数学的存在是个极重要的问

题，在本章的后面还要详加讨论。

对什么是合理的数学这一问题的关注起源于另一个原因。什么是可接受的数学公理？一个典型的例子是我们是否使用选择公理。在这个问题上，数学家们进退维谷。不用它或者否定它就意味着放弃数学中的大部分；而用它呢，则不仅导致自相矛盾而且还会导致直觉上不合理的结论（见第十二章）。

数学家们无力证明数学的相容性玷污了数学的理想。矛盾不期而遇，虽然它们都或多或少用可以接受的方法解决了，但新矛盾还会出现的危险使得一些数学家怀疑为保证严密性所付出的非凡努力。

如果数学不是一个独一无二的、严格的逻辑结构，那么它是什么呢？它是人们任何时候都乐于使用，经过逻辑筛选、提炼和组织的一系列伟大的直觉。人们愈是努力尝试提纯这些概念，系统化数学的演绎性结构，数学的直觉性就愈复杂。但数学正是建造在某种直觉之上的，这些直觉是我们的感觉器官、大脑和外部世界相结合的产物。它是一个人为的构造，任何为其寻求绝对基础的尝试注定是要失败的。

数学通过一系列伟大的直觉的进步而发展，这种发展后来通过不断地修正错误，建立起在当时可以接受的证明。终极的证明是不存在的，新的反例总是会逐渐推翻已有的证明。然后这些证明就会得到更正，并且被错误地认为从此可以一劳永逸了。但是历史告诉我们，这仅仅意味着对这个证明关键性的检验尚未来到，这种检验常被人们一厢情愿地推迟。问题不仅在于挑错不会得到什么荣誉，也在于有理由质疑这个定理证明的数学家也许想在他自己的工作中引用这个定理。数学家们更关心建立他们自己的理论而不是找出现有结果的缺陷。

有几个学派曾尽力想把数学纳入人类逻辑的范围之内，但是直觉否认这种思想。在坚实的基础上建立起来的可靠的、无可置疑的一贯正确的数学的概念当然起源于古希腊人的梦想，体现在欧几里得的成果之中。在二十多个世纪之中，这种梦想一直引导

着数学家们的思想，但是很显然，数学家被“鬼才”欧几里得误导了。

事实上，数学家并不像通常所认为的那样依赖于严格的证明。他的创造对他来说，其意义超过任何形式化，这个意义赋予其创造的存在性和现实性。从一个公理结构中推导出一个精确结果的尝试在某些方面是有所帮助的，但并不能真正巩固其地位。

直觉甚至比逻辑更令人满意和放心。当一个数学家问自己为什么某个结果应站得住脚时，他寻求的是一种直觉的理解。事实上，如果所证出来的结果没有直觉意义，那么这种严格证明对他来说就一文不值。如果确实是这样，他就会非常挑剔地检查证明，如果证明看来是对的，他才会努力去找出他自己直觉上的毛病。数学家们总想弄清楚一系列的演绎推理之所以成功的内在原因。彭加勒说过：“当一个比较长的论证导出了一个简单的、惊人的结果后，在我们表明了我们可以预见的，即使不是全部结果，至少也是主要特征之前，我们是不会满意的。”

很多数学家更是依赖于直觉。哲学家叔本华表达过这样一种态度：“为了改进数学方法，有必要放弃那种认为证明真实性优先于直觉知识的偏见。”帕斯卡创造了术语“几何精神”和“技巧精神”。他用前者表示思维的力量和正确性，例如强有力的逻辑推理所表现出来的那些；用后者表示思维的广阔，表示看得更深、更远的能力。对于帕斯卡而言，即使在科学中，技巧精神也是远在逻辑之上的一种思想水准，逻辑根本不能与之相比。即使从推理的角度来说，无法理解的东西仍然可能是真实的。

很久以前，其他数学家也宣称过直觉的信念胜过逻辑，就像太阳的灿烂光芒胜过月亮的淡淡清辉一样。依赖于基础性的直觉和适度逻辑的笛卡尔评论道：“我发现对逻辑而言，在谈论我们已知的东西或者未知的东西而不作评价时，它的演绎推理和大多数规则是相当有用的。”不管怎样，笛卡尔喜欢用演绎推理来补充直觉（见第二章）。

那些伟大的数学家在逻辑证明尚未给出以前，就知道某个定

理肯定是正确的，有时候只要有迹象表明证明是存在的，他们就满足了。事实上，费马关于数论的大量经典工作及牛顿关于三次曲线的工作甚至没有给出一个表明证明是存在的暗示。自然，数学的前进主要是由那些具有超常直觉的人们推动的，而不是由那些长于做出严格证明的人们。

这么说，证明的概念不像普遍认为的那么重要，虽然它在公众的头脑中和数学家们的著作中显得那么突出。这些不同的证明标准，互相矛盾的数学哲学的出现，引起了人们对证明价值的极大怀疑。早在 1928 年，哈代就用他一贯的坦率语气说过：

> 严格说起来，根本没有所谓的数学证明；……归根到底，我们只是指出一些要点；……李特伍德(Littlewood)和我都把证明称之为废话，它是为打动某些人而编造的一堆华丽词藻，是讲演时用来演示的图片，是激发小学生想象力的工具。

对哈代来说，证明只不过是数学大厦的门面而不是其结构中的支柱。

1944 年，杰出的美国数学家怀尔德(Raymond L. Wilder)再次贬低了证明的地位。他说，证明只不过是

> 对于我们直觉产物的检验……。很明显，我们不会拥有而且极可能永远不会有任何一个这样的证明标准，其独立于时代，独立于所要证明的东西，并且独立于使用它的个人或某个思想学派。在这种情况下，明智的做法似乎就是承认，一般地来说，数学中根本就没有绝对的真实证明这个东西，而无须考虑公众会怎么想。

证明的价值又被怀特海在一次题为《不朽》的讲演中再次攻击：

> 逻辑被认为是思想发展的充分分析，事实上并非如此。它是一种绝妙的工具，但它还需要有一些常识作背景……。我的观点是：哲学思想的最终形

> 式不能建立在构成特殊学科基础形式的精确阐述之上。所谓精确性本身就是虚假的。

绝对严格的证明以及与它类似的东西都是捉摸不定的，理想化的概念，“在数学的世界中没有它们天然的栖身之地”。什么叫严格？对此本来就没有严格的定义。一个证明，如果被当时的权威所认可，或者是用了当时流行的原理，那么这个证明就可为大家所接受。但现在，并没有一个普遍接受的标准，现在不是数学严密性最辉煌的时代。可以肯定，过去人们认为数学的特征——从明确的公理经过无可辩驳的证明——如今已不复存在了。一切限制人们思维的易谬性和不确定性，逻辑都具备。肯定有人感到惊讶，在数学中，我们习惯性地做了那么多基本假设却从来没有意识到。

哲学家尼采（Nietzsche）曾说过“玩笑是情感的墓志铭”。数学家们为了减轻沮丧的心情，不得不嘲弄他们的学科中的逻辑。“逻辑证明的优点不在于强迫别人相信，而在于提出了怀疑。证明告诉我们何处值得怀疑。”“既要尊重但又要怀疑数学证明。”“我们不再指望一定要是逻辑的，只要不是非逻辑的，就谢天谢地了。”“多些活力，少一些严密。”数学家勒贝格，一个直觉主义者，于1928年说过：“逻辑可以使我们拒绝某些证明，但它不能使我们相信任何证明。”他在1941年写的一篇文章中又说，逻辑不能用来使人信服，不能产生自信，而我们对符合直觉的东西充满信心。他还认为，我们对数学研究得越多，这种直觉就越敏锐。

即使是完全遵循逻辑化纲领的罗素，也对逻辑极尽挖苦之能事。在他著的《数学原理》（1903年）中，他写道，“证明的一个主要优点，就是它向我们逐渐灌输对所证明的结果的某种怀疑。”他又说，人们尝试把数学建立在一个由没有明确定义的概念和命题所组成的系统上，正是从数学的这一本质推知：结论可以被矛盾否认，但绝不会被证明。一切都最终依赖于直觉的理解。略后（1906年），由于当时悖论的困扰，他在他的著作中所说的比他后来所做的要正确得多。当自相矛盾的事物表明那时的逻辑证明并

非可靠时，他说："不确定的因素总是存在的，就像在天文学中的那样。在某个时候，也许这种不确定因素会大大削弱，但对凡人来说永远不犯错是不可能的……"

在这些对证明的嘲弄中，我们也许可以加上波普（Karl Popper），一位杰出的数理逻辑研究者的话："对一个证明有三种不同层次的理解。最低的一层是抓住了论据后的喜悦之情；其次是再现它的能力；第三层或者说最高的一层是要能反驳它。"

更具讽刺意味的是海维赛所说的相互矛盾的观点。他一贯瞧不起数学家对严密性的过分关注："逻辑是不可战胜的，因为要反对逻辑还必须使用逻辑。"

哥廷根大学是本世纪头 25 年数学界的中心；其领导人物克莱因尽管基本上不涉及基础问题，但他看出了关于数学发展的一些东西。在他写的《高观点下的初等数学》（1908 年）中，克莱因对数学发展做了如下描述：

> 事实上，数学已经长得像棵大树，但它不是从最细的根部开始生长的，也不是只向上生长的，相反，在枝、叶扩展的同时，它的根向下扎得越来越深……。那么，我们就能看出，数学中的基础是没有最终结局的，从另一方面讲，也没有一个最初的起点。

虽然彭加勒属于一个不大相同的学派，但他也表达了一个类似的观点：没有完全解决了的问题，只有或多或少解决了的问题。

数学家们一直在崇拜一个金犊*——严密、普遍接受的证明，在所有可能的世界中都是正确的——他们相信它就是上帝。但他们现在意识到这是个假的神，而真神拒绝显露真身。现在他们必须质问，上帝是否存在。然而，可以发话的摩西**还未露面，有理

---

* 古代以色列人崇拜的偶像。——译注

** 《圣经》中传说率领希伯来人摆脱埃及人奴役的领袖，犹太教的教义、法典多出自其手。——译注

由问为什么。

还有一些人，如拉卡托斯（Imre Lakatos）对数学基础工作者关于数学基础所做的工作极不耐烦，因而严加批评说，如果数学最终是靠直觉，那为什么我们的研究工作可以一直深入下去呢？

> 然而，我们为什么不早一点结束这一步呢？为什么不说“最终检验一种方法在算术中是否可接受，必然等于它在直觉中是否有说服力的。”……为什么不老实承认数学的易谬性呢？为什么要尽力保护易谬知识的尊严不受冷嘲热讽的伤害，而不是自我欺骗地说什么我们能够悄悄地修补我们的“最终”直觉的构造中的最后裂缝呢？

有个故事恰当地说明了与证明相对的直觉的价值。故事是这样的：一个物理学家在他实验室的门上挂了一块马蹄铁，一个吃惊的参观者问他这有没有给他和他的工作带来好运，“没有”，这个物理学家回答说，“我不搞迷信，但这样似乎有点用。”

爱丁顿（Arthur Stanley Eddington）曾说过，“证明是数学家自己折磨自己的幽灵。”为什么他们还继续这么做呢？我们不妨问：如果他们知道他们的学科不再是相容的，尤其是他们如果不能再就什么是正确的证明达成一致，那么他们强调推理又有什么用呢？他们真该对严密性漠不关心吗？举起手认输，并且说作为一个体系完好的数学只是一个幻觉？他们难道该放弃演绎证明，而只求助于使人信服的、直觉上合理的论证吗？毕竟，自然科学中用了这样的讨论，甚至于他们在使用数学的地方也不太在意数学家们对严密性的热情。弃而舍之不是可取的路，任何人，只要看到了数学对人类思想的贡献就绝不会牺牲证明的概念。

我们必须承认逻辑也有一定的作用。如果直觉是主人，逻辑是仆人，那么这个仆人对主人有一定的影响力，它制约着如同无缰之马的直觉。虽然直觉确实起着主要的作用，但它也会导致太一般化的结论，所需的适当的限制条件由逻辑来施加。直觉把谨慎抛入云霄，而逻辑则教人要有节制。确实，对逻辑的坚持通常

需要用很多的理论和证明，慢条斯理地达到那些用强有力的直觉一下子就能征服的目标。但是直觉所控制的桥头堡，必须通过彻底地清扫那些充满敌意、有可能包围并破坏桥头堡的敌人来进行巩固。

直觉可能是具有欺骗性的。在19世纪的绝大部分时间中，包括严密性奠基人柯西在内的数学家们认为一个连续函数必有导数，但是维尔斯特拉斯给出了一个无处可导的连续函数而震惊数学界。这样的函数过去不能现在也不能为直觉所接受，数学推理不仅补充直觉——确认或校正它，而且还能偶尔地超过它。

数学推理在数学中的作用也许可以用一个比喻说得更清楚些。假设有一个农夫在荒野中圈了一片地，准备用来耕种。但他注意到四周的树林里有野兽出没，随时都有可能袭击他，因此他决定把这片树林清掉。他这样做了，于是野兽移到了紧靠着新开辟的土地的树林中。这个过程没完没了地进行下去，农夫开出了越来越多的地，但野兽仍在土地边缘徘徊。这个农夫得到了什么呢？最起码，当他开的地越大，野兽被赶得越远时，只要他在地中央耕种，他就越安全。同样的，当我们用逻辑解决一个又一个基础问题之后，我们使用数学的核心的安全性就越大。换句话说，证明保证了我们相对安全。如果我们能证明某个理论是建立在关于数和几何图形合理叙述的基础上（它比那些证明结果在直觉上更易于接受），我们就能确保其正确性。用怀尔德的话来说，证明是我们对于由我们的直觉所提出的思想的检验过程。

不幸的是，一代人给出的证明在下代人眼中总是错误的。就像一流的美国数学家穆尔（E. H. Moore）早在1903年就说过的那样，“包括逻辑和数学在内的所有科学，都是时代的产物——这里指理想中的各种科学以及它们的成就。”“当时的苦恼就够人受了。”今天，证明的概念还取决于人们坚持什么思想学派。如果一个证明在可以看到的范围内，不涉及矛盾而且在数学上是有用的，那么怀尔德也就心满意足了。例如，他会把连续统假设当成公理使用。他批评多种思想流派的分野降低了证明的重要性。那些人

恪守一种流派教条而排斥其他，不就类似那些宣称自己代表了真正的上帝而排斥其他教派的宗教分子吗？

我们现在被迫接受一个这样的事实：没有所谓的绝对证明或者普遍接受的证明。我们知道，如果我们对我们在直觉基础上接受的论述有疑问，那么我们只有接受直觉基础上的其他论述，才能证明它们。如果我们不打算陷入自相矛盾或者其他未克服的困难之中，我们就不能对这些终极的直觉过分深钻，因为其中有一些就是逻辑方面的问题。大约 1900 年，著名的法国数学家阿达马说过："数学中严密性的目的只是承认和整理直觉的成果。"我们已不能再接受这样的判断了。还是魏尔说的更为恰当："逻辑是数学家用来保持他思想健康强壮的卫生手段。"证明确实起到了一定的作用，它减小了矛盾出现的危险。

我们必须认识到绝对的证明只是个目标而不是现实，是一个我们所追求但很可能永远达不到的目标，它可能只不过是一直为人们所追寻而永远捉摸不定的幽灵。我们应做出不懈的努力加强我们已有，但却没打算加以完善的东西。我们从证明的历史中得到的教训就是：即使我们追求的是一个达不到的目标，我们仍能像过去的数学家一样，取得辉煌的成就。那么如果我们改变对待数学的态度，尽管我们的幻想破灭了，我们仍会更乐于探索这门学科。

这种认识——直觉在保证数学真实性上起了基础性的作用，而证明起了支撑的作用——表明在更大的意义上，数学走了一个大圆圈。这门学科从直觉与经验的基础上开始发展，后来，证明成了希腊人的目标，直到 19 世纪，才又幸运地回到出发点。这似乎晚了点，但是追求极端严密性的努力却突然把数学引入了死胡同，就像一只狗追逐自己的尾巴一样，逻辑打败了它自己。帕斯卡在他的《感想录》中说得好："理性所走的最后一步就是承认有无穷多的事物超出了其认识范围。"

康德也承认理性的局限。在他的《纯粹理性批判》中，他说：

> 我们所具有的理性都非常奇特，它总是被一些

> 不能忽视的问题困扰着，因为这些问题源于理性的本质，所以也是无法回答的，它们超出了人类理性的能力。

或者按乌纳穆诺（Miguel de Unamuno）在《人生的悲剧感情》中所说的，“理性的最高成就是引起了人们对其有效性的怀疑。”

魏尔对于逻辑所起的作用更为悲观。1940年他说过，“尽管，或者说因为，我们具有深刻的洞察力，今天我们却比以往任何时候都不能确定数学应建立在什么样的终极基础上。”1944年，他详述道：

> 数学的终极基础和终极意义这一问题尚未解决，我们不知道沿着什么方向上可以找到最终答案，或者甚至于不知道是否有希望得到一个最终的、客观的答案。“数学化”很可能是人类原始创造力的一项创造性活动，类似于语言和音乐，其历史观点否认完全客观的合理化。

按魏尔所说的，数学是一种思维活动，而不是精确知识体系，这一点在历史上看得很清楚。基础的理性构造和重建现在只是对历史的滑稽模仿。

最极端的观点是由波普，一位著名的科学哲学家，在《科学发现中的逻辑》中表述的，数学推理永远不能证实，而只能证伪，数学理论不能以任何方式加以保证。如果没有 一个更好的理论，人们就会继续使用已有的理论，就像在相对论出现之前的二百多年，人们一直用牛顿的力学理论，或者说就像在黎曼几何出现之前，人们一直是用欧氏几何。但是要确保正确性是做不到的。

历史支持这种观点：没有固定的、客观的、唯一的数学体系。进一步说，如果历史具有某种指导作用，将会不断有新的内容添入数学之中，因而呼唤新的基础。在这方面，数学就像任何一门自然科学。当与先前的理论相抵触的新现象或新的实验结果出现时，就必须修改这些理论，而且必须将这些新现象、新结果纳入其内，没有时限的对数学真理的描述是不可能存在的。想把数学

建造在稳固基础上的尝试都以失败而告终，从欧几里得到维尔斯特拉斯一直到现代的基础学派，不断地试图提供一个坚实的基础，但没有任何迹象能允诺最终的成功。

这些对直觉和证明的作用的陈述表明了数学在今天的景象，但它并不反映关于将来的所有观点。一群以笔名布尔巴基写作的数学家对逻辑重新加以肯定，在《数学原理》(第一卷)的引论中，他们评论道：

> 历史地讲，认为数学与矛盾无缘肯定是不对的，不自相矛盾是作为一个要达到的目标，而不是向我们保证过的一劳永逸、天赋的特性。从最早的时候起，所有对数学原理的重大更改几乎都是紧跟在一些不确定的时期之后。此时，矛盾暴露出来而且必须加以解决……。经过了 25 个世纪，数学家们已经有了改正错误的经验，从而看到数学是更加丰富多彩，而不是逐渐贫乏，这使他们有权利安详地展望未来。

面对历史也许会有某些安慰，但是历史也告诉我们新的危机将会出现。然而，这种前景并未减少布尔巴基派的乐观主义。

狄多涅，法国数学家的领袖人物，布尔巴基派的一员，确信出现的逻辑问题总是可以解决的：

> 有人可能又会说，如果有一天发现数学是自相矛盾的，我们应知道是哪一条规则导致了这个结果，然后我们可以取消这条规则或对它进行适当的修改从而避免这种矛盾。简单地说，数学将会改变一下方向但仍不失为一种科学。这不全是一种推测，在发现了不合理之处后，人们总是这么做的。今天，我们把它看作人类精神的最高胜利之一，而远不是对在毕达哥拉斯派数学中发现的矛盾的悲叹。

狄多涅有可能又会提起莱布尼茨关于微积分方法的例子（见第七章），在接受了 18 世纪所有对这种方法的批评之后，非标准分析

（见第十二章）使它在逻辑主义、形式主义和集合论公理化相容的基础上变得严格起来了。

除了布尔巴基派表示出对数学逻辑的修正拥有信心之外，还有些数学家相信存在着一种唯一的、正确的、永恒的数学体系，虽然它也许不能应用于客观世界。他们的观点是：证明的不一致和不确定性源于人类理性的限制，进一步说，人们现有的不一致只是会被逐渐克服的暂时的障碍。

康德主义者是这些人中的一部分，他们认为数学深深植根于人类理性之中，以至于对什么肯定是正确的不存在任何问题。例如，哈密尔顿，虽说他发明的这个尤物——四元数——导致了对算术的自然真实性的质疑，但他在1836年坚持非常类似于笛卡尔的见解。他说：

> 代数和几何这些纯数学化的科学，是纯粹理性的科学，其从经验中取之甚少，它是孤立的或者至少是孤立于外部世界的偶然现象……。它出自于我们内心的思想。拥有它们只是我们先天能力的结果，是我们特有的人性的展现。

凯莱，一位19世纪顶尖的代数学家，在英国科学促进会的一次讲演中（1883年）说“我们……拥有先验认识，它不仅不依赖于某一经验，而且独立于一切经验……。这些认识是思维对于经验的解释做出的贡献。”

虽然像哈密尔顿和凯莱这些人认为数学植根于人们头脑中，其他人却认为数学存在于人以外的世界之中。存在一个独立于人的数学真理的客观世界，这种信念可以追溯至柏拉图（见第一章），且被人们一再确认，尤其是莱布尼茨，他区分了理性真理和事实真理，前者适用于所有可能的世界。最先称赞非欧几何重要性的高斯，也确信数和分析的真实性（见第四章）。

优秀的19世纪分析学家埃尔密特也相信存在一个客观的数学真实世界。在给数学家斯蒂杰斯（Thomas Jan Stieltjes）的一封信中，他说：

> 我相信，数和分析中的函数不是我们精神的任意产物，它们在我们之外存在着，并且和客观实在的对象一样，具有某种必然性的特征。我们找到或发现它们、研究它们，就和物理学家、化学家及动物学家所做的事情一样。

在其他场合他又说过，“在数学中，我们是仆人而不是主人。”

尽管有基础上的各种矛盾，许多20世纪的学者坚持同样的主张。康托尔，集合理论及超限数的创始者，认为数学家不是发明而是发现概念和理论，它们独立于人类思想之外。他把自己只看作一个报告人和秘书。虽说哈代对人类的证明充满疑虑，但他还是在1929年的一篇文章中说：

> 在我看来，如果一个数学家不以这种或那种方式承认数学真理的不变性和绝对正确性，那就不会有一种哲学同情他。数学理论是对还是错，它们的真理性或谬误性是绝对独立于我们对它们的认识的。在某些意义上，数学真理是客观现实的一部分。

在他名为《一个数学家的自白》的书中，他表达了同样的观点：

> 为了避免引起误会，我将不客气地陈述我自己的立场。我确信，数学的现实性不依赖于我们而存在，我们的作用是揭示或观察它，而我们所论证和夸张地命名为我们的“创造”的定理，实际上只是我们观察的记录。

本世纪法国数学家的领袖人物阿达马在他的《数学领域中的发明心理学》中宣称：“尽管这真理还不为我们所知，但它是先验地存在的，而且必然影响我们应该遵循的路径。”

哥德尔也坚持一个超验的数学世界的存在。就集合理论来说，他宣称把所有集合都看成是实体是合理的：

> 在我看来，假设这样一种实体与假设物理实体一样合理，并且有同样多的理由相信它们是存在的。同样地，它们迫切需要一个令人满意的数学理论，就

> 像自然物体对于一个令人满意的人类感性知觉理论一样必要。在这两种情况下，都不可能把一个人关于这些实体的主张解释为关于“数据”——即后一种情况中突然产生的感性知觉——的主张。

这些断言的一部分来源于本世纪那些对基础不甚关心的人们。使人感到惊讶的是甚至于一些基础工作的领袖们，希尔伯特、丘奇，还有布尔巴基学派的成员都宣称数学概念和命题存在于某些客观意识中，且可以为人类思维所领悟。因此，数学真理就是被发现而不是被发明，逐步完善的不是数学，而是人们的数学知识。

持这种观点的人常被称为柏拉图主义者。虽然柏拉图确信数学存在于独立于人类之外的某种理想世界中，但他的学说中包含很多与当前观点相悖的东西，而且“柏拉图主义者”这个名称不尽相宜。

这些声称一个客观的、唯一的数学体系的断言，没有说清楚数学存在于何处。它们只是说数学存在于某一超常世界中，恰似海市蜃楼，只能为人所感知。公理和定理并不是纯粹的人类创造，它们更像是深藏在地下的珍宝，只有耐心地挖掘，才能使它们重见天日，但它们的存在就像行星的运转一样是独立于人的。

那么，数学究竟是藏在宇宙深处、逐渐被发现的一堆钻石，还是一堆光怪陆离的人造宝石，洋洋自得的数学家们也被弄得眼花缭乱。

更进一步，如果存在一个超感知的、绝对的、本质的世界，而且如果我们在逻辑和数学上的命题只是对这些本质观察结果的记录，那么矛盾和错误的命题不就在同样的意义上与真实的命题相提并论了吗？谬误和自相矛盾的毒草就会与真、善、美的鲜花同样欣欣向荣，也许魔鬼和真理之神一道播种收获。柏拉图主义者当然反驳说，只是因为人类的能力不足以抓住真理，所以才产生了荒谬的命题和矛盾。

第二种观点认为数学纯粹是人类思想的产物，其当然为直觉

主义者所支持，这可以追溯至亚里士多德。然而，有些人宣称真理是由思维保证的，而其他人则坚持数学是易谬的人们的创造物，而不是固定不变的知识体。早在现代的争论出现之前，帕斯卡就在他的《思想录》中就这一观点作过一段经典论述："真理是如此微妙的一个尤物，我们的工具太愚钝了，以至于对它难以捉摸。而当触摸到它时，又将它碰倒并使其偏向于一边，但更多的是偏向错误而不是真实。"海丁（Arend Heyting），一位主要的直觉主义者，宣称今天没有人能谈及真正的数学，正确的、唯一的知识体意义上的真正数学。

汉克尔、戴德金和维尔斯特拉斯都认为数学是人类的创造。戴德金在给韦伯的一封信中宣称："此外，我们通过数所理解的并不是事物本身，而是一种新的东西，……它是思维所创造的，我们是上帝的儿子，我们拥有……创造的能力。"维尔斯特拉斯用下面这些话表示了他对这种思想的认同，"真正的数学家是诗人。"还有维特根斯坦（Lnding Wittgenstein），罗素的一个学生，凭借自己的能力而成为一位权威，认为数学家是发明者而不是发现者。所有这些人和其他人认为数学是远超出经验的发现和理性推断的束缚的某个东西。支持他们这种立场的是如下事实：比如说无理数、负数这样的基本概念，既不是经验发现的推断，也不是明显存在于某个外部世界的本质东西。

魏尔对于永恒的真理也颇多讽刺。在他的《数学和自然科学的哲学》中，他说：

> 哥德尔绝对相信先验逻辑。他喜欢认为我们的"逻辑透镜"只是有点散焦，他希望在略加调整之后我们会看得清楚，那时，每个人都会同意我们看到的是正确的。但是不具备他这种信念的人则会被策梅罗系统，甚至希尔伯特系统中的高度武断所困扰……。没有能永远确保我们的相容性的希尔伯特；对能满足现有精巧数学实验的测试的简单公理系统，我们应该感到满意，即使以后出现不一致时，改变

基础也为时不晚。

诺贝尔奖获得者、物理学家布里奇曼（Percy W. Bridgman）在《现代物理学的逻辑》中（1946年），断然否认存在任何客观的数学世界。“认为数学是人类的发明纯属无稽之谈，这只要稍加观察即可明白。”理论科学是一种制造信念的数学游戏，所有人坚持认为数学不仅是人造的而且深受在它发展中的文化的影响。它的“真实性”就像对颜色的感知那样，是独立于人类的。政治、经济和宗教的信条总是竭力诱使我们相信，它们是客观存在的，是独立于人类的真理体系。相比之下，数学只是部分地使人接受了这一点。它也许独立于任何一个人而存在，但不独立于它所存在的那种文化。魏尔说过，就数学的总体来说，它不是一个孤立的技术成果，而是人类存在的一部分，由此它找到了自己的证明。

支持这种认为数学是人造物观点的人们从本质上说是康德主义者，因为他们将数学的源泉归结于头脑的组织能力。然而，现代主义者却认为数学并非起源于头脑的形态或生理，而是源于头脑的活动，它是用发展的方式组织的。头脑的创造性活动不断形成更新、更高的思想形式。在数学中，人类的头脑有能力清楚地看到它可以自由地创建它认为有意义或有用的知识体系。而且，创造的领域不是封闭的，人们将创立一些适用于现存的或新出现的思想领域的见解。人的头脑有能力设计出这样的结构，并提供一种整理经验数据的模式。数学的源泉就在于思维自身的不断发展。

现有的关于数学自身本质的各种矛盾以及今日数学不再是一个被普遍接受的、无可辩驳的知识体系这一事实毫无疑问支持了这样一种观点，即数学是人为的。就像爱因斯坦所说，“谁把自己当作是真理和知识领域的法官，谁就会在众神的哄堂大笑中毁灭。”

颇具讽刺意味的是，理性时代的知识分子却将数学作为人类理性力量和他获知真理能力的证据，满怀信心地宣称推理会解决人类的所有问题。20世纪的知识分子，虽然他们相信推理力量的作用，但他们不能把数学指定为范例和标准。这一系列事件简直

是一场智力的灾难。数学是人类为获得精确而有效的思维而做出的最广博和最深刻的努力，这一点仍是对的；而且数学所取得的成就是人类思维能力的量度，它代表在所有理性领域我们有望获得成果的上限。但在今天，面对着关于什么是有效的数学这一混乱局面，我们颇感不安。这就是为什么希尔伯特如此绝望地试图从客观的、不容置疑的推理意义上重建真理的原因。就像他在1925年的论文《关于无穷》中所说的："如果连数学思考都失败了，那么哪里还能找到可靠和真实的东西呢？"

在波伦亚召开的国际数学家大会的报告中，他又重申了这种担心：

> 就我们所有的知识的真理和科学的存在及进步而言，如果数学中没有真理，那么它们究竟会变成什么样子呢？实际上，在今天，专业文献和公开讲演中经常出现对知识的怀疑和失望，这是一种神秘主义，我认为是有害的。

看起来，一种连续不断、永不停息的追求正如很早以前歌德所指出的，这正是人类的可取之处：自救者终将得救。

虽然魏依（André Weil）对绝对真理的存在并不那么有信心，但他坚持认为对数学的探求必须进一步深入，即使数学并非人类理性的高塔。正如他所说：

> 对我们——就是那些被希腊思想遗产的重担压弯了肩膀的人，那些走在由文艺复兴时期的英雄们所开辟的道路上的人——来说，没有数学的文明是不可想象的。正如平行公理，数学得以为继的假设已被抽去"证据"，但是，前者不再必需，而没有了后者我们将寸步难行。

数学的未来从未有更多的希望，其本质也从来没有如此清楚。对于这些明显的东西所进行的微妙分析使得情况越来越复杂，且永不休止。但数学家们将为解决这些基本问题而不懈努力，就像笛卡尔所说的，"我将继续前进，直到我找到某种确定的东西——

或者，最起码，直到我能确信没有什么是确定的。”

按照荷马（Homer）所说，在科林斯（Corinth）的国王西西弗斯（Sisyphus）死后，诸神罚他推一块巨石上山，而在他接近顶峰时，又使石头滚落山底，于是重新再推，如此劳作不已。他没有想过有那么一天，他的苦役会结束。数学家有这个意志和勇气，他们几乎是本能地去完善和加固其学科的基础，他们的奋斗也许会永不停息，他们也许将永不会成功。但是现代的“西西弗斯们”将会坚持下去。

第十五章　自然的权威

我祈祷，
我知道，自然永远不会背叛
那热爱着她的心……

——威廉·华兹华斯

数学家们能够从许多对立的方面推出新的结果，因为无法从事物本身判断孰是孰非。其中，最重要的原因自然是数学的产生和发展以及数学对科学的作用，这是一种传统的、仍然是最无可非议的原因。人们现在知道数学基础的不确定性以及对于数学逻辑的疑问即使不能够被解决，也可以通过加强它在自然上的应用来回避，用爱默生（Ralph Waldo Emerson）的话说，就是让我们“用物质为思维营造基地”。在先验的基础上，我们不能断言由数学定理产生的结果必定可以直接运用；我们也不能断言，如果将其与合理的物理原理一同使用时，从这些原理中产生的演绎推理可以导致正确的物理结果。但是，应用可以提供一个实用的检验

标准，对于那些反复推出正确结果的定理，人们使用它们的信心将会逐步增强。比如说，如果选择公理能在连续的使用中始终得到合理的物理结果，那么对它的疑虑也就自然消除了。

从历史上看，人们求助于应用似乎并不像当今的数学家们那样彻底。概念和公理来自于对自然界的观察，甚至逻辑的规律现在也被普遍认为是经验的产物。那些引发定理的问题，甚至是关于证明方法的提示也都来自于自然界。至少到了 75 年前，由公理推导出的结果的价值才由物理世界的肯定而得以证实。仅通过数学的应用来判断其正确性而言，当然谈不上绝对的检验。一个定理也许在 n 次情况下都是对的，但却会在第（$n+1$）次情况下是错误的。一次差异将使定理不成立。但我们可以修正它以保证使用的正确性，历史上已经做到了这一点。

J·穆勒（John Stuart Mill）提倡数学的经验基础和用经验来检验数学。他承认数学要比许多物理科学更为普遍，但“证实”数学正确性的则是因为其命题比起其他物理科学的定理来，已在更大程度上得以检验和肯定。这样一来，人们便开始错误地认为数学定理与其他科学的假设和定理有质的不同，数学定理被认为是确定的，而物理定理则被认为只是由经验所证实的。

穆勒将其主张建立在哲学的基础上，这是在现代关于数学基础的论战开始前很久的事。多由于这一原因，许多近代和当代的基础研究工作者们成了实用主义者。正如希尔伯特所说：“从他们的成果中你可以了解他们。”希尔伯特在 1925 年又说：“在数学中和在其他地方一样，每个人都遵守成功这个最高法庭的判决。”

莫斯托夫斯基（Andrzej Mostowski）在基础研究中表现得突出而活跃，他赞同希尔伯特的观点，在 1953 年波兰举行的一次会议上，他说：

> 这种唯一贯穿始终的观点，倒不如说是一种假设：数的概念——不仅是自然数，也包括实数——的源泉和最终存在的理由来自于经验和实际运用。他不但与正常人的理解力相符合，而且与数学的传

> 统相符合。在经典数学领域所需要的集合论的概念中，情形也是这样。

莫斯托夫斯基更进一步说，数学是一门自然科学，其概念和方法均起源于经验，那些试图建立数学而忽视它在自然科学中的本源、忽视它的运用、甚至忽视它的历史的努力都注定会失败。

也许更令人惊奇的是魏尔这名直觉主义者也赞成通过在自然界中的运用来判断数学的合理性。魏尔对数学物理做出了大量的贡献，尽管他坚决支持直觉原理，但却不愿因为坚持这些原理而牺牲有用的结果。在《数学与自然科学的哲学》(1949 年)中，他勉强承认说：

> 启发式论据以及其后爱因斯坦广义相对论中的系统结构，或者海森堡-薛定谔的量子力学是多么令人信服并接近事实啊！一种真正的数学应该和物理学一样被当作是真实世界的理论结构的分支，并且我们应该用同样严肃谨慎的态度去对待其基础的扩展，就如同对待物理学的一样。

毫无疑问，魏尔提倡将数学作为一门科学来对待。数学定理和物理学定理一样也可能是尝试性的，并无把握。它们也许还须改造，但是，是否与实际相符是检验其合理性的可靠标准。

卡瑞 (Haskell B. Curry) 作为一名著名的形式主义者在这方面走得更远，在其《数学逻辑的基础》(1963 年) 中，他说道：

> 数学需要绝对的确定性来证实自身吗?特别是，我们有必要确保某一理论是相容的或确保其在使用之前是通过非经验论时期绝对可靠的直觉得到的吗？在其他科学中，我们并没要求这样做。在物理学中所有的定理都是假设的，一个定理，只要能够作出有用的预告我们就采用它。而一旦它不再适用，我们就修改或丢弃它。过去，我们常这样对待数学定理，那时矛盾的发现将导致数学原则的变更，尽管这些数学原则在矛盾发现前还是为人们所接受

的。为什么我们在未来的日子里不能这样做呢？

奎因(Willard Van Orman Quine)是一位活跃的逻辑学者，他在企图简化罗素-怀特海的原理上做了许多无用功。他也欣然满足于物理合理性，至少现在是这样。在一本名为《现代逻辑的哲学意义》的集子中，有他一篇1958年的文章，他写道：

> 我们将采用看待自然科学的理论部分的方式来看待集合论与整个数学。这些真理或假设与其说是为纯粹的推理所支持，还不如说是对自然科学中经验数据的组织所做的间接的、系统的贡献。

对形式主义和集合论做了基础性贡献的冯·诺伊曼也致力于采取同样的方法打破现有僵局。在一篇著名的文章《数学家》(见B·罗伯特的《思维的创造》，1947年)中，他认为尽管几个基础学派都没能证明经典数学的正确性，但大多数数学家还是照样使用它：

> 当所有的经典数学都产生了既优雅又实用的结果后，尽管仍然不能绝对确保其可靠性，但它至少已立足于一个像电子的存在那样合理的基础上了。因此，如果你想要接受科学的话，你最好还是接受数学的经典体系。

然而，数学的地位并不比物理学强多少。

即使是罗素，他虽然在1901年宣称数学真理、逻辑和物理的大厦是坚不可摧的，但却在1914年的一篇短文中承认"我们关于自然的几何知识是人为的而非先验的。"这并不是仅从逻辑中得到的结论，在其《原理》第二版中，他进一步承认：逻辑和数学就像麦克斯韦电磁理论方程一样可信，"因为人们已看到了某些逻辑结果的真实性。"

也许更令人惊奇的是哥德尔在1950年说的一段话：

> 被提出而未证实的"基础"所起的作用相当于在物理理论中解释性假设的功能……。在数论和其他任何一个建设得很完善的数学理论中，所谓逻辑

> 或集合论公理化基础都是解释性的，而非基础性的。就好像在物理中公理的实际作用是解释该系统中定理所描述的现象，而不是为这些定理提供一个真正的基础。

这些领袖人物都意识到，试图建立一个可普遍接受的、逻辑上合理的数学体系的努力已经失败了。数学是一种人类活动，它受制于人类的各种弱点和过失。除了推理上的因素以外，任何形式上的逻辑的解释只是一种伪数学，一种幻想，甚至是一种神话。

其他许多著名的基础工作者们把检验数学合理性的方法作为一种实用的方法，数学的应用就算不能绝对地，也可稳固地确保数学本身。即使是在需要偶尔修正的地方也一样如此。正如华兹华斯所说："我们的思想永远只能建立在自然的坚实基础之上。"

面对实用的检验标准，即强调数学在科学中的运用，基础论者似乎已欲放弃自己的原理和信念。考虑到数学的不合逻辑的发展（第五章至第八章），几个世纪以来的数学家们怎么会信仰数学呢？他们认为自己已经证明了一些结论，却没有认识到他们的证明是错误的。但是他们确实知道并无逻辑支持着负数、无理数、复数、代数或微积分，他们依靠的是应用。

求助于科学应用，或者说经验证据是值得注意的。欧几里得派理想地假设，从本身是真理的公理开始，经过有效的推理即可推导出进一步的真理。而以物理应用为依据则颠倒了数学的整个概念，如果采用演绎的方法，那么尽管这些公理未必是能得出结论的公理，但至少公理自身是合理的，但在有用的或能应用的数学意义上来说，真理是不可以倒行的。

实际上，几个基础学派的领袖都已将其信念搁置了至少很长一段时间。比如克罗内克，作为直觉主义学派的奠基人之一，在代数学上所做的一些有益的工作并未遵循他自己的准则，因为正如彭加勒所说，克罗内克忘记了自己的哲学。布劳维也是一样，在1907年的论文中，他提倡其直觉主义哲学，而在随后的十年里，却忽视了直觉主义者的原则而致力于拓扑学的研究和证明。

所有观点最终得到这样一个结论：决定数学的合理性的不是能在某一天被证明是正确的某一种基础，数学在物理世界中的应用决定其“正确性”，数学和牛顿力学一样是一门经验科学。当它有效时，就是正确的，若其无效，则须加以修正。尽管两千年来，数学一直被看作是一门先验知识，但实际上并非如此，数学不是绝对的、不可变更的。

如果我们把数学看作是一门科学，那么充分认识科学是如何运作的就显得尤为重要。科学通过观察和实验，然后建立一个定理，这个定理可能是关于运动、光、声、热、电、化合等方面的，这些定理都是人为的，人们通过进一步的观察和实验检验其预言。如果其预言至少能在实验误差允许范围内得以证实的话，该定理就将保留，但以后也许会被摒弃，并且定理始终是定理，而不像那些深含于物质世界中的真理那样。我们习惯于对待科学定理的这种态度，因为我们有许多因为新定理而摒弃旧的科学定理的例子。而人们不接受用这种态度对待数学的唯一原因就是：正如穆勒指出的那样，基本的算术和欧氏几何已有效运用了许多个世纪，以致人们错把它当作了真理。但我们现在必须看到数学的任何一个分支都只提供一个可用的理论。只要它可用一天，我们就须使用它一天，但将来也许会需要一个更好的理论。数学是人和自然的中介，它是我们自身与外界之间的一座充满险阻、令人生畏的桥梁。但当我们认识到无论是在现实中，还是在人类的思想中，这座桥的两端都未牢固地固定时，这是多么地令人悲哀啊！

理性对依据其自身方案建立起来的命题具有判断力，尽管理性优先于其所推出的命题，但它必须借助于实验从自然中抽取精华，这正是产生理论以及通过自然的行为决定理论地位的时候。

下述特征可以区分大部分的数学和物理理论。在科学中，理论曾经有过根本性的变化，而在数学中，大部分逻辑、数论以及经典分析已运转了许多世纪，它们一直而且仍然适用。从这个意义上说，数学不同于其他科学。无论这部分数学是否绝对可靠，它们运转得很不错，我们可以把它们称为准经验的。

我们尤其可以从微积分的历史中找到这方面的有利证据。尽管对微积分的逻辑仍有许多悬而未决的争论，但它仍然不失为一种成功的方法。具有讽刺意味的是，非标准分析（见第十二章）证实了莱布尼茨的无穷小量理论，但却并未证实所有的微积分的技巧。

我们甚至可以将可应用性这一标准运用于选择公理。正如策梅罗自己在其 1908 年的论文中指出的那样，“皮亚诺是如何得到他的基本原理的呢？……其实他一点也不能证明这些原理。显然，他只是通过分析在历史上已成定论的一些推理的方式，通过指出这些原理在直观上是很明显的，且为科学所需要，就得到这些原理而已。”在为他自己使用选择公理做解释时，策梅罗列举了这一公理所取得的成绩。在其 1908 年的论文中，策梅罗引证了这一公理一直（甚至直到那时）在超穷数理论上、在戴德金的有限数理论上以及在分析的技巧问题上，发挥了多么巨大的作用。

不仅仅是受这样一种需要所驱使，即一定要从几种关于基础的理论中进行选择，各种学派的领袖人物都力荐将数学在科学上的运用作为可靠性的指导和检验准则。他们都认识到数学在处理自然现象上的力量与日俱增，即使基础问题被弄清楚了，也不会放弃这种用途。尽管许多由于各种原因变得俗气虚夸却无甚功劳的数学家已摒弃科学达百年之久，但最伟大的近代领袖人物，如彭加勒、希尔伯特、冯·诺伊曼和魏尔仍在坚持不懈地寻求物理应用。

不幸的是，今天的许多数学家并未致力于应用（见第十三章），恰恰相反，他们仍不断地在纯数学中创造新的结论。我们可以从《数学评论》中获悉当前数学研究工作（纯粹与应用方面）的进展情形。这本杂志扼要地评述新的、或许是重要的数学成果，每期登载约 2,500 多条，即每年约 30,000 条。

正确的数学所面临的困境是，究竟哪一种学派的思想是最合理的，甚至就是在同一种学派内部还有许多错综复杂的方向供数学选择。这种困境本将给纯粹数学家们一个喘息的机会，使他们

在创造新数学前先致力于基础性问题的研究，因为这些新数学可能在逻辑上站不住脚。但他们却轻率地在未被应用的数学领域中产生了新成果。

对此有好几种答案。许多数学家并未重视基础工作，自 1900 年以来，他们工作的态度是典型的人类处理许多他们所面临问题的方式。几乎所有的人都在数学大厦的高处筑窝建巢。当基础工作者在勘查其基础以确保大厦安全时，房客们则在其上安居乐业。当基础工作者们越掘越深，已完全消失于视野中时，房客们仍未意识到大厦的基础有什么危险，也不知道大厦即将倒坍。因此他们继续沿袭传统的数学，他们不知道盛行的正统数学正面临挑战，依旧乐此不疲。

另外一些同时代的数学家则意识到了基础中的不确定因素，但他们宁愿采取避而远之的态度对待那些他们所称的哲学问题(与纯粹的数学问题相对)。他们很难相信基础中，至少是在他们自己的数学活动中会有什么严重的利害关系，他们宁愿恪守过时的教条。对这些人来说，潜台词就是：今后的 75 年，让我们就好像什么事也没发生过那样前进吧。他们在某种普遍的意义上大谈证明，即使根本没有这种东西。他们撰写和发表文章就好像不确定性根本不存在一样，对于他们来说，文章发表得越多越好。如果说他们还尊重合理的基础的话，那也只能是在星期天他们祈祷我主宽恕的时候或者是为了看看他们的对手正在做什么而停止写新论文的时候。个人的成就是绝对重要的——不管是对还是错。

难道就没有权威可以用基础问题仍需解决的理由来限制事态发展吗？杂志的编辑可以拒收这样的论文。但一般地，编辑与审稿人作为数学家来说，总是立场一致的。因此，有点严格昧道——1900 年的严格——的论文都被接受且发表。如果国王不穿衣服，法官们也不穿衣服，那么裸体就不足为怪了，也不会引起什么羞愧。正如拉普拉斯曾经指出的那样，人类的理性在追求进步中遇到的困难要比探求自身时少得多。

总之，基础的问题被许多深入腹地的科学家们束之高阁。数

理逻辑学家倒是致力于基础问题，但他们却常常被认为是在数学以外的人。

我们不能谴责所有那些忽视基础问题的数学家们。有一些人十分关心应用数学，他们还提倡为其权宜之计寻求历史上的依据。正如我们所看到的那样（见第五、第六章），尽管缺乏数系及其运算和微积分的逻辑基础，并且为此数学家已激烈论战了一个多世纪，但他们仍继续使用原有成果并创造了确实是卓有成效的新的结论。但证明却是粗糙的，甚至根本不存在证明。当发现矛盾时，数学家们就重新检查其推理过程并修正之。经常发生这样的情况：推理虽已改进，但即使是以19世纪末的标准来看，也仍然是不严格的。如果数学家们要等到推理达到这一标准的话，他们只会一事无成。正像皮卡所指出的，如果牛顿和莱布尼茨知道连续函数不一定可微的话，他们就不会创立微积分学了。在过去的日子里，冒险和谨慎共同取得了重大的进步。

哲学家桑塔亚那在《怀疑论和动物式信仰》一书中指出，怀疑对思维至关重要，而动物式信仰则对行为至关重要。许多数学研究具有极大的重要性，欲使这种重要性长存，研究工作必须继续进行。动物式信仰正是提供了这样的信念。

有一些数学家曾对基础性争论表示关注。鲍莱尔、贝尔及勒贝格明确表述了他们对集合论公理化方法有效性的怀疑。但他们仍使用之，只是对由其产生的结论的可靠性采取保留态度。1905年，鲍莱尔说他非常乐于沉浸在有关康托尔超穷数的推导中，因为它们有助于一些关键的数学研究。但是，鲍莱尔和其他一些人所选择的这条道路绝非是轻松愉快的。让我们听听现代最深刻、最博学的数学家之一魏尔的话吧：

> 我们从未像现在这样对数学的基础和逻辑无所适从。像现今世界中的每一个人、每一件事一样，我们也有自己的“危机”，这危机已经存在了近50年（现在是1946年）。外表上看来，它似乎并未妨碍我们的日常工作，但至少我承认它已在我的数学生涯

> 中起了相当实际的影响，它将我的兴趣引向那些我认为相对“安全”的领域，并不断地消耗我从事研究工作的热情和决断力。在人类所有忧虑与认识、苦恼与创造并存的情况下，那些关心他们所做的工作的意义的数学家也许会和我有同样的经验感受。

用应用来检验数学的合理性随即产生一个这样的问题，数学的有效性如何呢？就1800年以前的数学创造和应用而言，我们已经有机会（见第三章）通过多个例子，说明了数学在描述和预言自然界时是多么出色。但是，在19世纪数学家们引入了一些概念和理论，无论他们的动机是多么值得称道，但是这些概念和理论都不是直接从自然中提炼出来的，甚至看上去有悖于自然。例如，无穷级数、非欧几何、复数、四元数、一些奇异的代数学，各种大小的无穷集以及其他一些我们从未处理过的创造。在先验的基础上，我们没有理由认为这些概念和理论可以得以应用，那么我们先让自己相信这种现代数学是有效的，并且实际上是相当不错的吧。

已过去的百年中，最伟大的科学创造是电磁学理论、相对论和量子理论，它们都广泛地运用了现代数学。我们在这里仅讨论电磁理论，因为我们大家都很熟悉其应用。在19世纪前半叶，一部分物理学家和数学家对电学和磁学投入了大量研究，但却只有少数几个关于这两种现象特性的数学定律问世，19世纪60年代，麦克斯韦将这些定律汇集起来并研究其一致性。他发现，为了满足数学上的一致性，必需增加一个关于位移电流的方程。对于这一项他所能找到的物理意义是：从一个电源（粗略地说是一根载有电流的导线）出发，电磁场或电磁波将向空间传播。这种电磁波可以有各种不同的频率，其中包括我们现在可以通过收音机、电视机接收的频率以及X射线、可见光、红外线和紫外线。这样，麦克斯韦就通过纯粹的数学上的考虑预言了当时还属未知的大量现象的存在，并且正确地推断出光是一种电磁现象。

电磁波——由此可以追忆到万有引力（见第三章）——中尤

为值得注意的是我们对什么是电磁波并无丝毫的物理认识，只有数学断言它的存在，而且只有数学才使工程师们创造了收音机和电视机的奇迹。

同样的观察也被运用于各种原子与核现象。数学家和理论物理学家谈到场——引力场，电磁场，电子场等等——就好像它们都是实际的波，可以在空间传播，并有点像水波不断拍击船舶和堤岸那样发挥着作用。但这些场都是虚构的，我们对其物理本质一无所知，它们与那些可直接或间接感觉到或是看得见的事物，例如光、声、物体的运动，以及现在很熟悉的收音机和电视只是隐约地有些关系。贝克莱曾把导数描述为消失的量的鬼魂，现代物理理论则是物质的鬼魂。但是，通过用数学上的公式表示这些在现实中没有明显对应物的虚构的场，以及通过推导这些定律的结果，我们可以得到结论，而当我们用物理术语恰当地解释这些结论时，它们又可以用感性知觉来校验。

爱因斯坦于1931年强调了现代科学的虚构特点：

> 按照牛顿的体系，物理实在是由空间、时间、质点和力（质点的相互作用）等概念来表征的……
>
> 麦克斯韦之后，他们则认为，物理实在是由连续的场来代表的，它服从偏微分方程，不能对它做机械论的解释。实在概念的这一变革，是物理学自牛顿以来的一次最深刻和最富有成效的变革……
>
> 我刚才所阐述的见解，基础的科学理论原理具有完全的虚构性，决非18、19世纪盛行的那个观点。而这一见解却逐渐从以下事实中找到根据：在思维中，一边是基本概念和定律，另一边则是必须与我们的经验相关的结论，这两者之间的距离越拉越大。逻辑结构越简单，用以支持逻辑结构而在逻辑上独立的概念成分也就越少。

现代科学通过对自然现象的合理解释消灭了奇想、妖魔、天使，鬼怪、神秘之力以及泛灵论，人们为此而称道它。我们还要

补充一点：现代科学正逐渐夺走了直觉和肉体上的满足，这两者都是通过感觉来实现的：它也在逐步消除物质，它采用的是像场和电子这样的虚构的，理想的概念，对于这些概念，我们仅仅了解其数学定律。经过一长串的数学推导后，科学与感性知觉之间只存在着那么一点但却至关重要的联系。科学是合理化的虚构，而正是数学使之合理化。

赫兹（Heinrich Hertz）这位伟大的物理学家，第一个用实验证实了麦克斯韦关于电磁波能在空间传播的预言。他为数学的力量所震惊而不能抑制自己的热情，"我们无一例外地感受到数学公式自身能够独立存在并且极富才智，感受到它们的智慧超过我们，甚至超过那些发现它的人，从中我们得到的东西比我们开始放进去的多得多。"

詹姆斯·琼斯爵士也强调数学在自然研究中的作用。在《神秘的宇宙》中，他认为："根本的事实就是，科学为自然所描绘的所有图象以及那些与实际情况一致的图象，都是数学的图象……。"物理概念和机械论被认为构造了数学解释，但似是而非的是，物理辅助看来只是空想，而数学方程却仍是解释自然现象的唯一可靠保障。

在《物理学与哲学》一书中，琼斯重新肯定了这一想法。通过那些感觉可以捕捉的模型和图象，人的思维是不能理解自然运转的方式的。我们绝不可能懂得事件是什么，但我们必须用数学的语言来描述事件的模式。物理上的收获总是一大堆数学公式，物质实体的真正本质永远不为人知。

因此，现在看来数学在现代科学中的作用远不只是一种主要工具。用记号和公式将那些通过实验在物理上观察和建立起来的东西一般化、系统化，然后再从公式中推导出另外一些信息，而这些信息无论是和观察或实验，还是和其他易于理解的信息都不太接近，这就是人们所经常描述的数学的作用。但是，对数学作用的这种解释还远远不够，数学是科学理论的实质。19、20世纪在纯粹的数学结构基础上数学的应用与以前数学家们采用由物理

现象直接提取的概念所做的应用相比，更为有力和不可思议。尽管现代科学的成就——收音机、电视、飞机、电话、电报、高保真唱机及录音设备，X 射线、晶体管、原子能（及原子弹），在这里我们提及一些大家熟悉的东西——不能仅仅归功于数学，但是数学的作用比起其他任何实验科学的贡献来说，更为基本，更为重要。

在 17 世纪，培根曾对诸如哥白尼和开普勒的天文理论持怀疑态度，他担心他们受到哲学或宗教上信仰的影响——例如上帝对简单的偏爱或者是上帝对数学化安排的自然的设计——而不是出于观察或实验的需要。培根的态度当然是合理的，但现代数学理论已经开始单独占领了物理科学领域，因为它们的作用是如此有效。当然，接受任何一个学科的数学理论都需要与观察相一致。

因此任何关于数学是否有效的疑问都可以得到肯定的回答，但是数学为什么有效却不那么容易回答。在古希腊时期及随后的许多个世纪中，数学家们相信有清楚的指示告诉他们到哪里去寻找黄金——数学是物理世界的真理，逻辑原理也是真理——于是他们抖擞精神，急切而勤奋地挖掘着。他们的成绩是辉煌的，但我们现在知道他们当作是黄金的东西并不是黄金，而只是些贵重的金属，这种贵重的金属仍继续在极其精确地描述着自然的运转。为什么它在确保定量分析上做得如此之好？为什么人们会希望一个独立的、抽象的、先验的“精确”思想体系对自然界施加影响呢？

一种可能的答案是数学概念和公理是基于经验提出的，即使是逻辑定律也被承认是基于经验提出的。但这样的解释过于简单，用它来解释为什么 50 只牛加 50 只牛等于 100 只牛大概是足够了。在数和几何领域，经验也许的确提示了正确的公理，所用到的逻辑也只能从经验中学到。但是人类已在代数、微积分、微分方程及其他领域创造了并未由经验提示的数学概念和技巧。

除了这些非经验数学的例子以外，我们应考虑到数学上的直线由一个无穷多个点的集合组成。微积分则用了一个由瞬时组成的时间的概念，这些瞬时就好像实数系里的数那样“汇聚在一

起”。导数的概念（见第六章）可以由这样一个物理概念提出：某段无穷小时间内的速度。但是，当导数表示速度时，它只表示某一瞬间的速度。无穷集的种类当然无法由经验提出，但它却可运用于数学推理，它对一个令人满意的数学理论的作用就好像物体对感性知觉一样必要。数学还提供了一些像电磁场这样的概念，对这些概念的物理本质我们一无所知。

此外，尽管逻辑定律和一些物理原理是由经验得到的，在对物理上有重要意义的结论进行广泛的数学证明过程中，这些定律会反复用到，并且，证明也只能建于这种逻辑之上。纯粹的数学推理导致诸如海王星存在之类的预言。自然遵守逻辑原理吗？换句话说，有这么一种逻辑体系（姑且不论它是如何得到的）能够告诉我们自然是如何运转的吗？那些涉及到成百上千个关于抽象概念的定理和推论的主要理论与现实紧密结合，如同公理与现实的结合那样。这一事实说明了数学具有一种表示和预言实际现象的令人难以置信的精度。这一长串的纯推理为什么会产生如此非凡的应用结论呢？这是数学上最奇特的怪事。

因此，人们面临着双重奥秘。虽然物理现象可通过物理语言理解，但对那些被证明与公理本身同样运用的推理，为何数学一样有效呢？而在那些我们对物理现象仅有猜想，并几乎完全依靠数学来描述这些现象的领域，数学也一样有效呢？这些问题是不容忽视的。我们的科学技术在很大程度上依靠数学，数学虽然曾在真理的无敌旗帜下作战，但是在这门科学中是否有某种魔术般的内部力量使之获取胜利呢？

这一问题曾被反复提出，著名的有阿尔伯特·爱因斯坦的《相对论侧记》（1921 年）：

> 在这里产生了一个让各个时期的科学家均感困惑的谜题。数学作为独立于经验的人类思维的产物，为何与物理现实中的客体如此吻合？没有经验依据，而只靠纯粹的思维，人类就能够发现实际事物的性质吗？……

> 只要数学的命题是涉及实在的，它就不是可靠的；只要它是可靠的，它就不涉及实在。

他继续解释道，数学的公理化使得这种差别清晰化。虽然爱因斯坦知道数学公理与逻辑原理来源于经验，他仍提出这样一个问题：为什么那些长而复杂的纯推理能产生如此卓著的应用结论呢？毕竟，这些推理是独立于经验的，而且涉及的概念是由人类头脑所创造的。

一种现代解释起源于康德。康德确信（见第四章）我们不懂得也不可能懂得自然，更确切地说，我们拥有的是感性知觉。我们的头脑依据天生的关于空间与时间的先定结构（康德称之为直觉）来支配感知，因此我们依照欧氏几何的定律组织空间感知，因为我们的头脑需要如此。而正是因为如此，所以空间感知继续遵循欧氏几何定律。当然，康德在坚持欧氏几何的问题上是不正确的，但他认为人类思维决定自然行为的观点确有部分道理。思维决定了我们的时空概念，我们在自然中所看到的东西无非是我们的思维事先确定好的东西。

另外一种与康德的观点类似，但进一步扩展了的观点是由爱丁顿所提出的，他是当代最伟大的物理学家之一。按照他的说法，人类思维决定了自然必须如何去运作：

> 我们发现，科学发展得最快的地方，思维就从自然中重新获得那些原来放进去的东西。我们在未知的彼岸发现了古怪的足迹。为了解释它的起源，我们设计了一个又一个深奥的理论，最终我们成功地找到了足迹的来源。哦！原来是我们自己的足迹。

近年来，康德有关数学为何有效的解释已由怀特海详尽阐述，甚至布劳维1923年在一篇论文中也对此表示拥护。关键的思想就是：数学并非一门独立于外部世界现象并运用于其上的学科。相反地，它是我们用自己的方式构想这些现象的基础。自然世界并不是客观地呈现在我们面前，它只是建立在人的感觉基础之上的人类的解释或构造，而数学则是组织人类感觉的主要工具。于是，

自然而然地，人们用数学来描述人类已知的外部世界。这样，为何多数人都接受同样的数学结构则可以用这样一种假设，即人类的思维可能实际运转起来差不太多来解释。或者解释为以下一种事实：人们出生于某种文化和语言环境中，这种环境制约着他们接受某种特定的数学系统。欧几里得几何尽管并非是关于空间的最后定论，但它仍占据了统治地位，这一事实证明了后一种观点。对于日心说也是一样，因为一开始，它与托勒密理论观察的矛盾并未促使其改进。此外，如果那时托勒密理论能够保持并提炼，与更近一些的观察相吻合的话，无疑它同样也能非常有效，而只是增加些数学上的复杂性罢了。

上述思想的实质可以这样表述，我们试图从复杂的现象中提炼出某些简单的系统，其性质能用数学来描述，这种抽象化的力量是形成对自然令人惊异的数学描述的原因。另外，数学“透镜”允许我们看到什么，我们就只能看到什么。这一思想还在如哲学家威廉·詹姆斯的《实用主义》中有所表述：“数学和物理科学所取得的所有辉煌成就……来源于我们不屈不挠地希望将世界熔铸成我们头脑中的更加合理的图象，而不是那种由我们的经验杂乱无章地扔在那里的场景。”

一位近代作家用更加诗一般的语言这样描述：“现实是最富魅力的情人，她对你百依百顺，但她决不是你停泊的港湾；因为她只是一个影子，她在你的梦里，只是当你自己的思想照射在自然之上时，她才隐约闪现。”

虽然康德解释说我们在自然中看到的东西都由我们的思想事先决定，但它仍未能完全解释数学为何有效的问题。在康德的时代之后，像电磁理论这样的发展很难说是人的大脑的奉献还是感觉经过大脑的产物。收音机和电视机本来是不存在的，因为人脑根据某种内部结构组织感觉，而这种结构则使我们把收音机和电视机作为自然必须如何运作这样的思维概念的结果来体验。

也有数学家认为数学是自主的（第十四章），也就是说，无论其公理是纯推理的产物还是由经验得到的产物，在其后，数学的

整个体系都是独立于经验的。那么以这种观点来看，数学又是如何能应用于自然界，特别是物理现象的呢？这里有几种答案。一种是，数学公理使用了未定义的术语，这些术语可以有不同的解释以满足物理情形。举个例子来说，椭圆非欧几何在通常的意义上适用于直线，而在直线就是大圆的球面，它也适用。

彭加勒提出一种典型的解释。他倾向于将数学看作是一门纯推理科学，只推导其公理里面所包含的东西。于是人们就采用貌似正确的公理，也许再加上感觉的暗示，建立起欧氏几何和非欧几何。这些几何的公理和理论既不是经验真理，也不是先验真理，它们既非正确又非错误，正如用极坐标而不用直角坐标一样。彭加勒称这些几何为度量物体的老一套，或概念的虚假定义。我们选用最方便的那一种几何，然而，他又坚持说我们应该用直线的通常解释——即拉紧的线或直尺的边缘——来运用欧氏几何，因为这种解释是最简单的。那么为什么我们还应继续运用那些推论呢？彭加勒的回答是我们通过修正物理定律使数学变得合适。

为了说明彭加勒的论点，让我们看一下测绘员是如何确定距离的。他们先选定一条方便的基线 AB（图 15.1），其长度可以通过直尺实测得到。为确定 AC 间距离，测绘员用置于 A 处的望远镜对准 C 点，然后再转动望远镜直到看到点 B，从经纬仪的标度上他可以读出转动了多少角度（这样就测得了角 A 的大小）。用同样的办法测得角 B，接着，假定从 C 到 A 和从 B 到 A 的光线都走直线（拉紧的细绳），由于欧氏几何的公理适用于拉紧的细绳，于是，他采用欧氏几何或三角学计算 AC 和 BC。但是，测绘的结果也许是错的，为什么呢？从 C 到 A 的光线有可能是按图 15.1 所示的虚线前进的，在 A 点的测绘员为接收光线就必须将其望远镜对准光线的切线方向，这样，

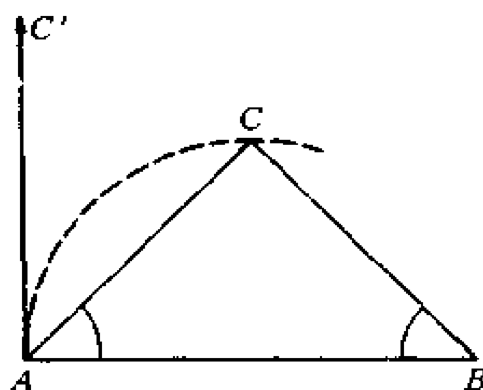


图 15.1

望远镜实际指向的方向就是C'的方向了。尽管此时测绘员在望远镜中看到的是点C。因此，他实际测得的角度是$C'AB$而不是CAB。那么接着用欧氏几何就可能导致AC和BC的错误结果。

光线是如何行进的呢？某些时候其路径确为直线；但有时光线会由于大气的折射效应变弯。假设测绘员得到的AC和BC的结果是不正确的，即使他没有理由相信光线的路径是曲线，他也必须按曲线处理。这样，他才能修正在A点和B点角度的测量值，并运用欧氏几何得到AC和BC的正确值。

彭加勒的论点——数学可以为符合物理现实而制造，还有另外一个例子。让我们看看他是如何解释地球是否自转这个问题的吧。他认为我们应该把地球自转作为一个物理事实来对待，因为其可以使我们设计一种较为简单的天文学的数学理论。事实上，数学理论的简单性也是哥白尼和开普勒所能提出的用以支持其日心说，反对老的托勒密理论的唯一论据。

彭加勒的哲学有其可取之处。我们确实试图采用最简单的数学，为使我们的推理符合物理事实而确有必要时，我们便会变更物理定律。但是，今天数学家和科学家所采用的准则是整个数学理论和物理理论的简单化，如果我们必须用到非欧几何——正如爱因斯坦在其相对论理论中所做的那样——来产生最简单的组合理论，我们也就用之。

尽管彭加勒解释如何使数学行之有效的观点更为明确，但他也确实在一定程度上对康德的解释表示赞同。因为他认为自然与数学的和谐是由人类思维所创造的。在《科学的价值》中，他说：

> 人类理性所揭示的在自然中的和谐是否不依赖于人类理性而存在？毫无疑问，并非如此。完全独立于精神，却又构想它、理解它、探求它的现实是不存在的。如此客观的世界，即使存在的话，我们也永远无法深入其中。我们称之为“客观现实”的东西，严格地说，就是那种为一些思想者所共有，并可能会为所有的人所共有的东西。这种共有的部分，

我们将看到，只可能是数学定律表示的和谐。

数学为何有效，还有一种未免有些模糊，也许过于简单的解释。按照这种观点，存在着一个客观的物理世界，人们不断的努力使数学与之相符。在应用过程中，发现数学有歪曲真相或明显错误时，我们便修正数学。希尔伯特在第二届国际数学家大会（1900年）上的演讲中阐述了这一观点：

> 即使当纯思维的创造力进行工作时，外部世界又开始起作用，通过实际现象向我们提出新的问题，开辟新的数学分支。而当我们试图征服这些新的，属于纯思维王国的知识领域时，常常会发现过去未曾解决的问题的答案，这同时就极有成效地推进着老的理论。据我看来，数学家在他们这门科学各分支中所经常感觉到的那种令人惊讶的相似性和协调性，其根源就在于思维与经验之间这种反复出现的相互作用。

关于数学为何有效的解释越简单，重申那些自古希腊时期一直到1850年左右数学家们所相信的东西就越不可信。一些人仍然相信自然是按数学设计的，他们也许认为许多物理现象的早期数学理论是不完美的。但他们却强调不断的完善它则不但可包含更多的现象，而且还可提供与观察更精确的一致性。因此，牛顿力学取代了亚里士多德力学，相对论则完善了牛顿力学。这一历史是否暗示了确有某种设计存在，而人类正在越来越靠近真理呢？埃尔密特对数学与科学的和谐性做了如下解释：

> 如果我未被蒙蔽的话，确实存在着一个由数学真理汇集成的世界，就正如存在着一个物理现实的世界一样，我们只有通过我们的智慧去接近它。这两者均为神的创造，是独立于我们存在的，它们之间之所以呈现差别是因为我们力不能及，而在一种更为有力的思考方式下，它们是一体的，是同一种事物。这两者的综合已被部分揭示，这就是在抽象

> 数学与所有物理分支之间存在着不可思议的一致性。

在给可尼斯伯格（Leo Köningsberger）的一封信中，埃尔密特又说："这些分析观点是脱离于我们存在的，它们构成一个整体，只有一部分对我们坦露，毫无疑问，它与我们通过感觉所了解的其他事物全体有着神秘的联系。"

詹姆斯·琼斯爵士在《神秘的宇宙》中也接受老观点，即"从上帝所创造的产物的内在证据看来，这位伟大的宇宙建筑师现在似乎是一位纯数学家。"在开始，他认为人类的数学"还未与基本现实接触"。可到了这本书的末尾，他却变得愈发武断：

> 自然似乎精通纯数学的那一套规则。这是因为，在他们的研究工作中，数学家通过他们自身的内在意识而没有在任何可以的范围内依靠他们对外部世界的经验来阐述这些规则……无论如何，自然和我们有意识的数学头脑是以同样的法则运转的，这一点无可争辩。

爱丁顿在其晚年也开始坚信自然是用数学设计的，在《基本理论》（1946年）中明确地断言说，我们的头脑可以从先验知识中建立一门关于自然的纯科学，这门科学是唯一确定的，任何其他的都会有逻辑上的矛盾。因而从我们的头脑中可以获知光速是有限的，甚至自然中的常数——例如质子质量与电子质量之比——也可以先验地确定。这种知识独立于宇宙的实际观察并且比经验知识更为确定。

伯克霍夫是美国历史上第一个伟大的数学家，他在1941年毫不迟疑地重复并支持爱丁顿的论点：

> ……在物理定律的整个体系中，没有什么不能从认识论的考虑出发明确地推出的了，人们通过自身的思维体系将其感官经验进行解释。如果某一理性生物并不熟悉我们的宇宙但却熟悉这种思维体系，那么它也能够得到我们通过经验所得到的所有

物理知识，……例如，它可以推知镭的存在及其性质，而不是地球的大小。

爱因斯坦早期也曾表述过一种合理但不十分充分的解释以说明为什么数学与现实符合：

物理学的发展表明，在某一时期，在所有可想象到的构造中，只有一个显得比别的都要高明得多。凡是真正地研究过这问题的人，都不会否认唯一地决定理论体系的，实际上是现象世界，尽管在现象同它们的理论原理之间并没有逻辑的桥梁；这就是莱布尼茨非常中肯地表述的“先定的和谐”。

在《我眼中的世界》(1934年)中，爱因斯坦表达了他成熟的观点：

迄今为止，我们的经验已经使我们有理由相信，自然界是可以想象得到的最简单的数学观念的实际体现。我坚信，我们能够用纯粹数学的构造来发现概念以及把这些概念联系起来的定律，这些概念和定律是理解自然现象的钥匙。经验可以提供合适的数学概念，但是数学概念无论如何都不能从经验中推导出来。当然，经验始终是检验数学结构的实用性的唯一标准，但是这种创造的原理都存在于数学之中。因此，在肯定的意义上，我当然地认为，像古人所梦想的纯粹思维能够把握实在。

在另一篇文章中，爱因斯坦重新阐述了他的观点，这段关于上帝的话十分著名：“无论如何，我都坚信上帝不是在扔骰子。”就算上帝这样做了，也正如爱默生曾说过的，“上帝的骰子总是灌过铅的*。”爱因斯坦在这里并未断言我们今天的数学定律都是正确的，但是其中有些是正确的，并且我们有望越来越接近它们。正如爱因斯坦所说：“上帝难于捉摸；但并无恶意。”

---

* 铅心骰子易掷出六点。 ——译注

像爱因斯坦一样，作为伟大的历史学家和科学哲学家之一的皮埃尔·杜恒在《物理理论的目的及结构》中也从怀疑转向肯定。他先是将物理理论描述为“一种以在逻辑上将一堆实验定律概括和分类，但不要求解释这些定律为目的的抽象体系。”理论是近似的、暂时的和“被剥去所有客观注释的”。科学只熟悉那些可觉察的外观，我们应该放弃这种幻觉，在理论化过程中，我们是在“撕去这些可觉察外观的面纱”。而当一个天才科学家给混乱不堪的景象注入数学的秩序和清晰时，他就以不能揭示宇宙的真正本质的抽象符号来取代相对易于理解的概念。但在最后杜恒却这样说：“我们不能想象这种秩序和组织（由数学定理所产生）不是现实的影像。”这个世界是由一位伟大的建筑师用数学设计的，上帝永远在进行几何化，而人类的数学则描述了这一设计。

魏尔肯定数学反映了自然的秩序。在一次谈话中，他说道：

> 自然界固有一种隐含的和谐，它反映在我们头脑中的影像则是简单的数学定律。这便是为什么自然界现象可以通过观察和数学分析相结合而预知的原因。在物理学史上，这种内在和谐的概念，或者说这种梦想，出乎我们意料地一次又一次被证实。

然而，愿望也许是思想之父，因为在《数学与自然科学的哲学》一书中，他补充道：

> 如果没有一种对真理和现实先验的信仰支持，如果在事实和结构与思想的意象之间没有持续不断的相互作用，那么，科学便会枯萎死去了。

尽管琼斯、魏尔、爱丁顿以及爱因斯坦的观点不容轻视，但他们关于数学与自然的关系的观点并未占统治地位。的确，对自然的数学描述所取得的成功是如此令人震惊，以至于他们提供的解释看上去都是合理的。就如在许多个世纪的数学家们眼中，欧氏几何是不容置疑的真理。但是，在今天，这种对数学化设计的信仰看上去却是牵强附会的。

还有一种数学与物理世界关系的解释，其考虑了某些联系但

与通常人们所知的大相径庭。在过去的一百年中，出现了自然的统计学观点，稍具讽刺意味的是，这种观点由拉普拉斯所发起，而他本人却坚信：自然的行为是根据数学定律严格确定的，而自然行为的原因并不总为人知，观察结果只是近似正确而已。因此，人们应运用概率理论确定最有可能的原因和最可能是正确的数据。在这个问题上，他的《概率的分析理论》（第三版，1820 年）是经典之作。概率论和统计学的历史在这里没必要评述，但是在不到一个世纪的时间内，它引出了这样一个观点：自然的行为根本不是确定的，而是相当杂乱无章的。但其中有某个最有可能的行为，平均行为，这就是我们所观察到并认为是由数学定律所决定的行为。正如寿命各不相同的人，有的在婴儿时便夭折了，有的则活到一百岁。对所有的人来说，不只有一种估计寿命，而是在各个给定年龄都有一个估计寿命。根据这些数据，保险公司才能成功地做成生意。近年来自然统计学观点之所以得到了巨大的支持是因为量子力学的发展，按照这种观点，存在没有刚性的、离散的、受限于一定区域的微粒。它们在空间的任何一部分都仅以某一种概率存在，但在某一处概率最大。

无论如何，根据统计学观点，自然的数学定律顶多描述自然是如何以最有可能的方式运作的，但它不排除地球突然迷失于空间的可能性。自然也可能决定不按最有可能的方式运转。当今一些科学哲学家认为数学无法解释的问题仍旧无法解释。这一结论由皮尔斯首先提出："有些秘密极有可能仍不为人知。"

稍近一些时候（1945 年），薛定谔在《生命是什么》中说，人类发现自然定律的奇迹也许连他们自己也不能理解。另一位物理学家，极负盛名的戴森（Freeman Dyson）赞同道："我们可能仍未达到了解物理世界与数学世界间关系的程度。"这句话还以爱因斯坦的评述作为补充，"关于这个世界，最不可理解的是，这个世界是可以理解的。"

1960 年，维格勒（Eugene P. Wigner），另一位 1963 年诺贝尔物理学奖获得者，在一篇文章里，探讨了有关数学在自然科学

中不可思议的有效性问题，他的文章正以此为题，但除了重申论点外未作更多的解释：

> 用以阐述物理定律的数学语言的恰如其分是一个奇迹，它是我们不明白也不应拥有的令人惊叹的礼物。我们应为此感到高兴，不管怎么样，我们希望它在将来的研究中继续有效，并且能继续扩展，变得令我们更满意，就算同时可能会使我们迷惑不解，也以此拓宽了知识面。

最后的几句辩护式的“解释”实在太少，这几句解释承认了它对数学为何有效并未作出回答，但是富有感染力的语言都弥补了这一点。

任何关于数学为何有效的解释不论其是否令人满意，认识到自然和自然的数学表示并不相同才是重要的，它们的差别不仅仅在于数学是理想化的产物。数学三角形决非一个物理三角形，数学走得更远。在公元前 5 世纪，伊利亚的芝诺（Zeno of Elea）提出了若干悖论。不管其 目的如何，甚至是第一个关于运动的悖论就昭示了数学的概念化和经验之间存在差异。芝诺的第一个悖论是这样的：一个跑步者永远不可能到达跑道的终点，因为开始他必须跑过全程的 1/2，然后跑过剩下路程的 1/2，然后再是剩下路程的 1/2，如此下去，那么他必须跑过

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots$$

的路程。于是，芝诺认为，跑无限长的路程必须要无限长的时间。

一种关于芝诺悖论的物理解释，也是最明显的解释是：跑步者可用有限步跑完全程。但是，即使我们接受芝诺的数学分析的话，所需的时间也应是 1/2 分钟加上 1/4 分钟，加上 1/8 分钟，等等，这样，所有这些无限个时间间隔加在一起等于 1 分钟。这一分析完全脱离了物理过程，但其结果仍是一致的。

也许，人们只有通过引入极限甚至是人造的概念才能建立起自然的秩序。也许人类的数学仅仅是一个可行的方案，也许自然

本身更为复杂或者并没有什么固有设计。但是，数学仍不失为一种探索，是表示和掌握自然的一般方法。在那些数学行之有效的领域，它是我们的全部资本；如果它不是现实本身，它就是我们所能达到的与现实最接近的东西。

尽管数学是一项纯粹的人类创造，但它为我们开辟了通往自然某些领域的道路，使我们走得比全部预想更远。实际上，和现实距离如此遥远的抽象概念能获得巨大的成就，这本身就不可思议。数学解释也许确系人为，它也许是一个童话，但却是一个合乎道义的童话。即使我们不易解释人类的理性，但它却有力量。

数学的成功是有代价的，代价就是把世界用长度、质量、重量、时间等简单概念来看待。这样的解释是不足以表示丰富多彩的体验的，就如同一个人的身高并非此人一样。数学最多只描述了自然的某些过程，但其记号并未容纳所有的一切。

此外，数学处理的是物理世界中最简单的概念与现象，它的研究对象不是人而是无生命的物质，它们的行为是重复性的因而数学可以描述。但在经济学、政治理论、心理学以及生物学领域，数学就无能为力了。即使在物理王国，数学也只研究简单化的事物，这些简单化的事物与现实的接触就如同曲线的切线仅切曲线于一点一样。地球环绕太阳的轨迹是一个椭圆吗？不。只有当把地球和太阳都看作是质点而宇宙中其他天体的影响都忽略不计时才能成立。地球上的四季是年复一年循环的吗？也很难说，我们只能说从其大体上考虑，就像人们能够感受到的那样，四季是这样循环的。

我们能够因为不能理解数学不可思议的有效性而放弃使用它吗？赫维赛曾说：我能因为不知道消化的过程而放弃进食吗？经验驳斥了怀疑者。合理的解释则为自信所不屑。在给予宗教、社会科学和哲学全部应有的尊重，而我们又清楚地认识到数学并不处理我们生活中的这些方面的情况下，数学在给予我们知识方面仍然取得了不可限量的成功。这门知识并不只是建立在其正确性的断言上，在每台收音机到原子能发电厂的工作中，在日食或月

食的预言中，在发生于实验室的成千上万的事件中，在日常生活中，每天我们都可以检验它的正确。

数学处理的虽是较简单的物理世界的问题，但在其领域中它获得了最成功的发展。人类从数学中获得的力量促使他们希望自己能占有一席之地。数学治理了自然，减轻了人类的负担，从数学的成功中人们鼓起了勇气。

关于数学为何有效的问题并不仅限于学术范围以内。数学在工程上的运用过程中，人们在多大程度上依赖数学预言和设计呢？设计一座桥梁时，还需要用无穷集的理论或者选择公理吗？桥梁不会倒坍吗？庆幸的是，一些工程项目所用定理有过去的经验作为坚强后盾，人们可以放心使用。人们有意过度设计许多工程项目，于是，桥梁用钢这样的材料建造，但由于我们有关材料强度的知识并不准确，因而工程师便采用较理论要求强度为大的粗索和桁梁。但是，在建造以前从未有过的一类工程时，我们就必须注意所用数学的可靠性。在这种情况下，我们就应采取小心谨慎的态度，在建造本身开始以前采用小规模的模型或其他检验措施了。

这一章的中心是找到一些解决数学和数学家所面临的困境的方法。数学并没有被普遍采纳的体系，各个不同学派所提倡的许多条道路也不可能一一探究，因为这样做将会掩盖数学的真正目的，即促进科学的进步。因此，我们提倡用目的作为标准。我们也已经探讨过由这一过程引发的问题和结果了。

然而，当我们强调数学对科学的应用时，并不排除数学王国里其他有价值的，甚至是明智的探求途径。我们确已指出（见第十三章），即使在探求应用数学的过程中也需要各种各样的协助活动，如抽象化，一般化，严格化及方法的改进。除此之外，我们还可证明那些与数学不直接相关的基础研究在科学探索中是有用的。直觉主义者原打算用它们的结构主义方案，取代毫无意义的存在定理，却产生了计算量的方法，而纯粹的存在定理只是告诉我们这些量的存在。为了简单之故，我们举个老例子，欧几里得

证明了任意一个圆的面积与其半径的平方之比对于所有的圆都相同。这个比当然是π，于是欧几里得证明了一个纯粹的存在定理。但是知道π的值对我们计算任意给定圆的面积，显而易见是很重要的。还好，阿基米得的近似计算和后来的一些级数展开使我们能够在直觉主义者向纯粹的存在定理发起挑战以前很久就计算出了π值。同样，其他一些已证明其存在的量也应计算出来。因而，结构主义方案应予以贯彻。

进行基础研究还有一种潜在的价值，这就是可以得出可能的矛盾。相容性并未证实，因此，找到矛盾或者找到明显荒谬的定理至少可以淘汰一些现在耗费数学家时间和精力的待选择品。

我们对数学地位的解释当然不尽人意，我们剥夺了它的真实性；它不再是一个独立的、可靠的、有着坚实基础的知识体系。许多数学家背弃了对科学的热诚，这在历史上的任何时期都是令人扼腕的事，特别是在应用可能为数学指明了正确的前进方向时尤为可叹。而已应用的数学的惊人力量仍有待于解释。

抛开这些缺点和局限性不谈，数学对人类的贡献还有许多。它是人类最杰出的智慧结晶，也是人类精神最富独创性的产物。音乐能激起或平静人的心灵，绘画能愉悦人的视觉，诗歌能激发人的感情，哲学能使思想得到满足，工程技术能改善人的物质生活，而数学则能够做到所有这一切。另外，在推理力所能及的方向，数学家们已尽了最大的努力使人类的头脑能维护其结论的合理性。“数学一样的精确”作为一条谚语并非偶然，数学仍然是可用的最好知识的典范。

数学的成就是人类思想的成就，作为人类可以达到何种成就的证据，它给予人类勇气和信心，去解决那些一度看上去不可测知的宇宙秘密，去制服那些人类易于感染的致命疾病，去质疑去改善那些人们生活中的政治体系。在这些努力中，数学也许起到了作用，也许并无作用，但是我们对成功不可抑制的渴望来源于数学。

数学的价值至少不比任何人类创造小。如果所有这些价值不

易于或不能广泛地为人们所领悟和欣赏的话，所幸它们均被利用了。如果说攀登数学殿堂较攀登音乐殿堂更为艰巨，那么所得到的报酬也将更为丰厚，因为它包括人类创造可提供的几乎所有的智力的、艺术的和情感的价值。攀登一座高山也许要比攀登一座低矮的山头更为费力，但是高处的视野可延伸到更远的地平线处，而我们能提出的唯一的问题则是哪一个价值更为重要。然而，这个问题各人的回答不尽相同，因为个人的判断、意见和品味已溶于其中了。

就知识的确定性而言，数学是一种理想，我们为这一理想而奋斗，尽管我们也许永远不会达到。确定性也许只不过是我们在不断捕捉的一个幻影，它是如此无止境地难于捉摸。然而，理想具有力量和价值，公正、民主和上帝都是理想。的确，也有在上帝的幌子下被谋杀的人，审判不公的案件也臭名远扬，但是，这些理想是千百年来文化的重要产物。数学也是一样，尽管它也仅是一种理想。也许细想这一理想将会使我们更加清楚地认识到在任一领域，我们该选择什么方向才能获取真理。

人类面临的困境实在可怜。我们是广袤宇宙中的流浪汉，在自然的劫后余迹前孤立无援，我们依仗自然提供食物和必需品，在我们为何生于这个世界，又应为什么而奋斗的问题上都被一致化了。人类孤单地生存在一个冷酷的、陌生的宇宙中，他凝视着这个神秘的，瞬息万变的、无穷的宇宙，为他自己的渺小感到迷惑、困扰甚至惊骇不已。正如帕斯卡所说：

> 究竟为什么人存在于自然界中?无与无穷有关，全体与无有关，对无和全体及无穷之间的点我们一无所知。事物的结束和开始都被全无破绽地隐藏在一个难以洞察的秘密之中。同样，人类也无法知晓他为何来自一无所有，又如何被卷入了无穷无尽。

蒙田(Michel Eyquem de Montaigne)和霍布斯也用不同的语言阐述了同样的观点：人的生命是寂寞的、穷困的、艰险的、野蛮的和短暂的，他是偶然事件的牺牲品。

凭着一点有限的感性知识和大脑，人类开始探究其自身的奥秘。通过使用感官瞬间揭示的东西和可从实验中推知的事物，人类选用了公理并应用他的推理能力。他在寻求秩序，他的目的，就是建立与瞬变的感觉相对立的知识体系，建立可以帮助他获取有关其生存环境奥秘的解释模型。而他的主要成就，也是人类自身理性的产物，就是数学。它并不是完美的佳作，即使不断地完善也未必能去除所有的瑕疵。然而，数学是我们与感性知觉世界之间最有效的纽带。尽管我们不得不尴尬地承认数学的基础并不牢固，但是数学仍是人类思想中最贵重的宝石，我们必须将其妥为保管并节俭使用。它处于理性的前列，毫无疑问将继续如此，就算是进一步的研究复查又发现新的缺陷。怀特海曾写道："让我们把数学的追求看作是人类精神上神授意的疯狂吧。"疯狂，也许可以这么说，但是，毫无疑问，它是神授的。

人名索引

Abel, Niels Henrick：阿贝尔，1802—1829，挪威数学家。

Ackerman, Wilhelm：阿克曼，1896—1962，希尔伯特的学生。

Addison, Joseph：艾迪生，1672—1719，英国散文作家、文学评论家。

Airy, Sir George：艾利爵士，1801—1892，英国天文学家。

Alexander the Great：亚历山大大帝，前356—前323，前336—前323在位。

Ampère, André-Marie：安培，1775—1836，法国物理学家，对电磁学有重要贡献。

Anaxagoras：阿那克萨哥拉，约前500—前428，古希腊哲学家。

Anaximandros：阿那克西曼德，约前610—前546，古希腊哲学家。

Anaximenes：阿那克西米尼，约前588—前525，古希腊哲学家。

Apollonius：阿波罗纽斯，前262—前190，古希腊数学家。

Arcadius：阿卡丢，约377—408，东罗马帝国皇帝，395—408年在位。

Archimedes：阿基米得，前287—前212，古希腊学者。

Archytas：阿基塔斯，前428—前347，古希腊学者。

Argand, Jean-Robert：阿尔岗，1768—1822，瑞士业余数学家。

Aristotle：亚里士多德，前 384—前 322，古希腊哲学家、科学家、形式逻辑的奠基人。

Arnauld，Antoine：阿尔诺，1612—1694，法国神学家、逻辑学家、哲学家。

Auden，W. H.：奥登，1907—1973，原籍英国的美国现代诗人。

Avogadro：阿伏伽德罗，1776—1856，意大利物理学家、化学家。

Babbage，Charles：巴贝奇，1792—1871，英国数学家、发明家、现代自动计算机的创造人。

Bacon，Francis：培根，1561—1626，英国哲学家。

Baire，René：贝尔，1874—1932，法国数学家。

Banach：巴拿赫，1892—1945，波兰数学家。

Barrow，Isaac：巴罗，1630—1677，英国数学家，牛顿的老师。

Bayle，Pierre：培尔，1647—1706，法国启蒙思想家、哲学家。

Bell，Eric：贝尔，1883—1960，美国数学家。

Beltrami，Eugenio：贝尔特拉米，1835—1900，意大利数学家。

Berkeley，Bishop，George：贝克莱，1685—1753，英国哲学家。

Bernays，Paul：伯奈斯，1888—1978，希尔伯特的学生。

Bernoulli，James：詹姆斯·贝努利，1654—1705，瑞士数学家。

Bernoulli，John：约翰·贝努利，1667—1748，瑞士数学家。詹姆斯·贝努利之弟。

Bernoulli，Daniel：丹尼尔·贝努利，1700—1782，瑞士数学家，约翰·贝努利的次子。

Bernoulli，Nicholas：尼古拉·贝努利，1687—1759，詹姆斯·贝努利和约翰·贝努利的侄子。

Bertrand，Joseph L. F.：贝尔特朗，1822—1900，法国数学家。

Bessel，Friedrich Wilhelm：贝塞尔，1784—1846，德国天文学家、数学家。

Bhaskara：婆什迦罗，约 1114—1185，印度数学家、天文学家。

Birkhoff，George David：伯克霍夫，1884—1944，美国数学家。

al-Bîrûnî：阿尔比鲁尼，973—1048，波斯历史学家。

Bolyai，Johann：鲍耶，1802—1860，匈牙利数学家。

Bolzano，Bernhard：波尔察诺，1781—1848，捷克数学家、哲学家、逻

辑学家。

Bombelli，Raphael：庞贝利，1526—1572，意大利数学家、建筑工程师。

Boole，George：布尔，1815—1864，英国数学家、逻辑学家，自学成才。

Borel，Emile：鲍莱尔，1871—1956，法国数学家。

Bouvard，Alexis：布雷，1767—1843，法国天文学家。

Brahe，Tycho：第谷·布拉赫，1546—1601，丹麦天文学家。

Brahmagupta：婆罗摩笈多，约598—665，印度天文学家、数学家。

Bravais，Auguste：布拉维，1811—1863，法国结晶学家。

Bridgman，Percy W.：布里奇曼，1882—1961，美国物理学家、哲学家。1946年诺贝尔物理学奖获得者。

Brouwer，L. E. J.：布劳维，1881—1966，荷兰数学家。

Burali-Forti，Cesare：布拉利-福蒂，1861—1931，意大利数学家。

Cajori，Florian：卡乔里，数学史家。

Cantor，Georg：康托尔，1845—1918，德国数学家，集合论创始人。

Cardan，Jerome：卡丹，1501—1576，意大利数学家、医师。

Carnot，Lazare：卡诺，1753—1823，法国军事工程师。

Cassini，Jean-Dominique：卡西尼，1625—1712，天文学家，原籍意大利，后移居法国。

Cauchy，Augustin-Louis：柯西，1789—1857，法国数学家。

Cavalieri，Bonaventura：卡瓦列里，1598—1647，意大利数学家，伽利略的学生。

Cayley，Arthur：凯莱，1821—1895，英国数学家，矩阵论的创立者。

Chuquet，Nicolas：丘凯，约1445—约1500，法国数学家。

Church，Alonzo：丘奇，1903—　　，美国著名现代逻辑学家。

Clairaut，Alexis-claude：克莱洛，1713—1765，法国数学家。

Clarke，Samuel：克拉克，1675—1729，英国哲学家、数学家。

Cohen，Paul：柯恩，1934—　　，美国数学家，1966年菲尔兹奖获得者。

Comte，Auguste：孔德，1798—1857，法国哲学家。

Constantine the Great：君士坦丁大帝，约274—337，古罗马皇帝，306—337年在位。

Copernicus，Nicolaus：哥白尼，1473—1543，波兰天文学家。

Courant，Richard：库朗，1888—1972，现代数学家，原籍德国，后移

居美国。

d'Alembert，Jean Le Rond：达兰贝尔，1717—1783，法国数学家、启蒙思想家、哲学家。

Dedekind，Richard：戴德金，1831—1916，德国数学家。

Democritus：德谟克里特，约前460—前370，古希腊哲学家，与留基伯（Leukippos，约前500—约前440，古希腊哲学家）并称为原子唯物主义的奠基人。

De Morgan，Augustus：德·摩根，1806—1871，英国数学家、逻辑学家。

Desargues，Girard：德萨格，1591—1661，法国数学家、工程师、射影几何和画法几何的奠基人之一。

Descartes，René：笛卡尔，1596—1650，法国哲学家、物理学家、数学家、生理学家、解析几何的创始人。

Dickson，Leonard Eugene：迪克森，1874—1954，美国数学家。

Diderot，Denis：狄德罗，1713—1784，法国启蒙思想家、哲学家、文学家，《百科全书》主编。

Dieudonné，Jean：狄多涅：1906— ，布尔巴基学派主要成员之一。

Diocles：迪奥克斯，约公元前2世纪末，古希腊数学家。

Diophantus：丢番图，约公元前3世纪，古希腊数学家。

du Bois-Reymond，Paul：杜布尔-雷蒙，1831—1889，德国数学家。

Duhem，Pierre：杜恒，1861—1916，比利时物理学家。

Eddington，Arthur Stanley：爱丁顿，1882—1944，英国理论天体物理学家。

Einstein，Albert：爱因斯坦，1879—1955，现代物理学家，生于德国，1921年诺贝尔物理学奖获得者。

Emerson，Ralph Waldo：爱默生，1803—1882，美国散文作家、诗人。

Empedocles：恩培多克勒，前490—约前430，古希腊哲学家、医师。

Eratosthenes：埃拉托色尼，约前275—前194，古希腊地理学家、天文学家、数学家和诗人。

Euclid：欧几里得，约前330—前275，古希腊数学家。

Euler，Leonhard：欧拉，1707—1783，瑞士数学家、力学家、天文学家和物理学家，一生著述甚多，有《全集》74卷。

Fermat，Pierre：费马，1601—1665，法国数学家，解析几何的创始人之一。

Fontenelle，Bernard Le Bouvier de：方丹，1705—1771，法国数学家。

Fourier，Joseph：傅立叶，1768—1830，法国数学家、物理学家。

Frankel，Abraham A.：弗兰克尔，1891—1965，德国数学家，后移居以色列。

Frege，Gottlob：弗雷格，1848—1925，德国数学家，逻辑学家。

Fresnel，Augustin-Jean：菲涅尔，1788—1827，法国物理学家。

Galilei，Galileo：伽利略，1564—1642，意大利物理学家、天文学家。

Galle，Johann：加勒，1812—1900，德国天文学家。

Galois，Evariste：伽罗瓦，1811—1832，法国数学家。

Gassendi，Pierre：伽桑狄，1592—1665，法国哲学家、物理学家、天文学家。

Gauss，Karl Friedrich：高斯，1777—1855，德国数学家、物理学家和天文学家。

Gentzen，Gerhard：根茨，1909—1945，德国数学家。

Gergonne，Joseph-Diaz：格高尼，1771—1859，法国数学家。

Girard，Albert：吉拉德，1595—1632，法国数学家。

Göder，Kurt：哥德尔，1906—1978，现代数学家，原籍奥地利，后移居美国。

Goethe：歌德，1749—1832，德国诗人、剧作家、思想家。

Goldbach，christian：哥德巴赫，1690—1764，德国数学家。

Grandi，Guido：格兰迪，1671—1742，意大利数学家。

Grassmann，Hermann Gunther：格拉斯曼，1809—1877，德国数学家。

Gregory，David：大卫·格雷戈里，1659—1708，英国数学家、天文学家、光学家。

Gregory，Duncan：旦康·格雷戈里，1813—1844，英国数学家。

Gregory，James：詹姆斯·格雷戈里，1638—1675，英国数学家、天文学家。

Guldin，Paul：古尔丁，1577—1643，瑞士数学家。

Hadamard Jacques：阿达玛，1865—1963，法国数学家。

Halley，Edmund：哈雷，1656—1742，英国天文学家。

Hamilton，William R.：哈密尔顿，1805—1865，英国数学家，物理学家和天文学家。

Hankel，Hermann：汉克尔，1839—1873，德国数学家。

Hardy，Godfrey H.：哈代，1877—1947，英国数学家。

Harriot，Thomas：哈里奥特，1560—1621，英国数学家、天文学家、物理学家。

Hausdorff，Felix：豪斯多夫，1868—1942，德国数学家。

Heaviside，Oliver：亥维赛，1850—1925，英国物理学家、电机工程师。

Helmholtz，Hermann von：亥姆霍兹，1821—1894，德国生理学家、物理学家和数学家。

Heraclius：赫拉克利乌斯，约575—641，东罗马帝国皇帝，610—641年在位。

Hermite，Charles：埃尔米特，1822—1901，法国数学家。

Heron：海伦，公元1世纪左右，古希腊学者。

Herscher，William：赫歇耳，1738—1822，英国天文学家。

Hertz，Heinrich：赫兹，1857—1894，德国物理学家。

Hilbert，David：希尔伯特，1862—1943，德国数学家。

Hipparchus：喜帕恰斯，约前190—前125，古希腊天文学家、地理学家。

Hippasus：希帕苏斯，约公元前5世纪，古希腊学者。

Hobbes，Thomas：霍布斯，1588—1679，英国哲学家。

Hoëne-Wronski，J.：朗思基，1776—1853，波兰数学家、哲学家。

Hooke，Robert：胡克，1635—1703，英国物理学家、天文学家。

Hudde，John：赫德，1633—1704，荷兰数学家。

Hume，David：休谟，1711—1776，英国哲学家、历史学家、经济学家。

Huygens，Christian：惠更斯，1629—1695，荷兰物理学家、数学家和天文学家。

Jacobi，karl Gustav Jacob：雅可比，1804—1851，德国数学家。

James，William：詹姆斯，1842—1910，美国哲学家，心理学家。

Jeans，Sir James：琼斯爵士，1877—1946，英国物理学家，天文学家。

Jevons，William Stanley：杰文斯，1835—1882，英国逻辑学家、经济学

家。

Johnson，Samuel：约翰逊，1709—1784，英国作家、文学批评家和辞书编纂家。

Jordan，Camille：约当，1838—1922，法国数学家。

Kant，Immaanuel：康德，1724—1804，德国哲学家。

Kästner，Abraham G.：克斯特纳，1719—1800，德国数学家，高斯的老师。

Kepler，Johannes：开普勒，1571—1630，德国天文学家。

Klein，Felix：克莱因，1849—1925，德国数学家。

Klügel，Georg S.：克吕格尔，1739—1812。

Königsberger，Leo：哥尼斯伯格，1837—1921，德国数学家。

Kronecker，Leopold：克罗内克，1823—1891，德国数学家。

Lacroix，Sylvestre Francois：拉克鲁瓦，1765—1843，法国数学家。

Lagrange，Joseph-Louis：拉格朗日，1736—1813，法国数学家、力学家和天文学家。

Lakatos，Imre：拉卡托斯，1922—1974，原籍匈牙利，后到英国，科学哲学家。

Lambert，Johann Heinrich：兰伯特，1728—1777，德国数学家、物理学家。

Laplace，Pierre-Simon：拉普拉斯，1749—1827，法国天文学家、数学家和物理学家。

Lebesgue，Henri：勒贝格，1875—1941，法国数学家。

Legendre，Adrien-Marie：勒让德，1752—1833，法国数学家。

Leibniz，Gottfried Wilhelm：莱布尼茨，1646—1716，德国数学家，哲学家。

Leucippus：留基伯，见德谟克利特（Democritus）。

Leverrier，Urbain J，J.：勒威耶，1811—1877，法国天文学家。

L'Huiller，Simon：惠勒，1750—1840，瑞士数学家。

Lindemann，Ferdinand：林德曼，1852—1939，德国数学家。

Littlewood，John Edensor：李特伍德，1885—1977，英国数学家，长期与哈代合作研究。

Lobatchevsky，Nikolai Ivanovich：罗巴切夫斯基，1793—1856，俄国数学家。

Locke，John：洛克，1632--1704，英国哲学家。

Löwenheim，Leopold：勒文海姆，约1878—1940。

Masères，Francis：马塞雷，1731—1824，英国数学家。

Matyasevich，Yuri：马蒂塞维奇，前苏联数学家。

Maupertuis，Pierre-Louis Moreau de：莫帕图依斯，1698—1759，法国数学家。

Maxwell，James clerk：麦克斯韦，1831—1879，英国物理学家，经典电磁理论的奠基人。

Menelaus：梅内劳斯，约公元98年，古希腊学者。

Mersenne，Marin：梅森，1588—1648，法国数学家、物理学家、哲学家。

Mill，John Stuart：穆勒，1806—1873，英国哲学家、经济学家、逻辑学家。

Mittag-Leffler，Gösta：米塔格-莱夫勒，1846—1927，瑞典数学家。

Monge，Gaspard：蒙日，1746—1818，法国数学家，画法几何学和射影几何学创造人之一。

Montaigne：蒙田，1533—1592，法国思想家和散文作家。

Moore，Eliakim H.：穆尔，1862—1932，美国数学家。

Mostoweki，Andrzej：莫斯托夫斯基，1909—　，美籍波兰哲学家。

Napier，John：耐普尔，1550—1617，英国数学家，对数发明者。

Napoleon：拿破仑，1769--1821，法国政治家和军事家。

Nelson，Leonard：内尔森，1882—1927，德国哲学家。

Neugebauer，Otto：诺依格鲍尔，1899—　，数学史家。

Neumann，John von：冯·诺依曼，1903—1957，现代数学家，原籍匈牙利，后移居美国，为第一颗原子弹的研制及第一台电子数字计算机的研制作出了重要贡献。

Newton，Isaac：牛顿，1642—1727，英国物理学家、数学家和天文学家。

Nietzsche，Friedrich：尼采，1844—1900，德国哲学家。

Nieuwentijdt，Bernhard：纽汶提，1654—1718，荷兰物理学家和几何学

家。

Olbers，Heinrich W. M.：奥伯斯，1758--1840，德国天文学家。
Ovid：奥维德，前43--约后17，古罗马诗人。

Pacioli，Luca：帕哥欧里，约1445--1517，意大利数学家。
Pascal，Blaise：帕斯卡，1623--1662，法国数学家、物理学家、哲学家。
Pasch，Moritz：帕斯，1843--1930，德国数学家。
Peacock，George：皮科克，1791--1858，英国数学家。
Peano，Giuseppe：皮亚诺，1858--1932，意大利数学家、逻辑学家。
Peirce，charles Sanders：皮尔斯，1839—1914，美国哲学家。
Pemberton，Henry：潘伯通，1694—1771，英国物理学家、数学家。
Philolaus：菲洛罗斯，约公元前5世纪，古希腊学者。
Piazzi，Giuseppi：皮亚奇，1746--1826，意大利天文学家。
Picard，Emile：皮卡，1856—1941，法国数学家。
Pieri，Mario：皮埃里，1860--1913，意大利数学家。
Planck，Max：普朗克，1858--1947，德国物理学家。
Plato：柏拉图，前427—前347，古希腊哲学家。苏格拉底的学生，亚里士多德的老师。
Playfair，John：普莱费尔，1748—1819，英国地质学家、数学家、物理学家。
Plutarch：普卢塔克，约46—约120，古希腊传记作家。
Poincaré，Henri：彭加勒，1854—1912，法国数学家、物理学家和天文学家。
Poncelet，Jean-Vicfor：庞斯莱，1788—1867，法国数学家、工程师，
Pope，Alexander：蒲柏，1688—1744，英国诗人。
Popper，Karl：波普尔，1902—，生于奥地利，后移居英国。当代著名科学哲学家。
Pringsheim，Alfred：普林斯海姆，1850--1941，德国数学家。
Ptolemy，Claudius：托勒密，约90--168，古希腊天文学家、数学家、地理学家和地图学家。
Ptolemy，Soter：托勒密一世，前367—前283，古埃及托勒密王朝创建者，前305—前285年在位。

Pythagoreans：毕达哥拉斯，约前580—约前500，古希腊数学家、哲学家。

Riemann，Georg Bernhard：黎曼，1826—1866，德国数学家。

Roberval，Gilles Persone de：罗伯瓦尔，1602—1675，法国数学家、物理学家。

Robinson，Abraham：罗宾逊，1918—1974，美国数学家。

Roemer，Olaus：罗伊默，1644—1710，丹麦天文学家。

Rolle，Michel：罗尔，1652—1719，法国数学家。

Russell，Bertrand：罗素，1872—1970，英国哲学家、数学家、逻辑学家，1950年诺贝尔文学奖获得者。

Saccheri，Gerolamo：萨谢利，1667—1733，意大利数学家。

Santayana，George：桑塔亚那，1863—1952，美国哲学家。

Schopenhauer，Arthur：叔本华，1788—1860，德国哲学家。

Schröder，Ernst：施罗德，1841—1902，德国数学家、逻辑学家。

Schrödinger，Erwin：薛定谔，1887—1961，奥地利物理学家，量子力学奠基人之一。1933年诺贝尔物理学奖获得者。

Schwartz，Laurent：许瓦尔兹，1843—1921，德国数学家。

Seneca，Lucius：塞涅卡，约公元前—公元65，古罗马哲学家，戏剧家。

Shelley，Percy Busshe：雪莱，1792—1822，英国诗人。

Smith，Henry John Stephen：史密斯，1826—1883，英国数学家。

Snell，Willebrord：斯内尔，1580—1626，荷兰数学家、物理学家。

Stevin，Simon：斯蒂芬，1548—1620，荷兰数学家、工程师。

Stieltjes，Thomas Jan：斯蒂杰斯，1856—1894，荷兰数学家。

Stifel，Michael：施蒂费尔，约1486—1567，德国数学家。

Stolz，Otto：斯笃兹，1842—1905，奥地利数学家。

Sylvester，James Joseph：希尔维斯特，1814—1897，英国数学家。

Synge，John L.：辛格，1871—1909，爱尔兰剧作家。

Tait，Pater Guthrie：1831—1901，泰特，英国数学家。

Tarski，Alfred：塔斯基，当代波兰逻辑学家。

Taurinus，Frang Adolf：托里努斯，1794—1874，德国数学家。

Thalēs：泰勒斯，约前640--约前546，古希腊学者。

Theodosius：泰奥多希乌斯，约前20，古希腊学者。

Thomson，William：汤姆逊，1824—1907，英国物理学家，1892年被封为“开尔文勋爵”。

Unamuno，Miguel de：乌纳穆诺，1864—1936，西班牙作家、哲学家、语言学家。

Veronese，Giuseppe：韦隆内，1854—1917，意大利数学家。

Vieta，Francois：韦达，1540—1603，法国数学家。

Voltaire：伏尔泰，1694—1778，法国启蒙思想家、作家、哲学家。

Wallis，John：瓦理斯，1616—1703，英国数学家。

Weber，Wilhelm：韦伯，1804—1891，德国物理学家。

Weil，André：魏依，1906—　　，法国数学家，布尔巴基学派主要成员之一。

Weierstrass，Karl：魏尔斯特拉斯，1815—1897，德国数学家。

Weyl，Hermann：魏尔，1885—1955，德国数学家，后移居美国。

Wessel，Caspar：韦塞尔，1745—1818，挪威业余数学家。

Whitehead，Alfred North：怀特海，1861—1947，英国哲学家、数学家。

Wigner，Eugene P.：维格勒，1902—　　，美籍匈牙利物理学家。

Wittgenstein，Ludwig：维特根斯坦，1889—1951，原籍奥地利，后移居英国，现代哲学家。

Wren，Christopher：雷恩，1632--1723，英国建筑师、数学家、天文学家。

Woodhouse，Robert：伍德豪斯，1773—1827，英国数学家。

Wolf，christian：沃尔夫，1678—1754，德国哲学家。

Wordsworth，William：华兹华斯，1770—1850，英国诗人。

Young，Thomas：托马斯·扬，1773—1829，英国物理学家和医师。

Zermelo，Ernst：策梅罗，1871--1953，德国数学家。

Zeno：芝诺，约前490—约前436，古希腊哲学家。

参考文献

注：*A. M. M.* 表示《美国数学月刊》

Barker, S. F.: Philosophy of Mathematics, Prentice-Hall Inc, Engelwood Cliffs, N. J., 1964.

Baum, Robert J.: Philosophy and Mathematics from Plato to the Present, Freeman, Cooper & Co., San Francisco, 1973.

Bell, E. T.: "The Place of Rigor in Mathematics," *A. M. M.*, 41 (1934), 599—607.

Benacerraf, Paul and Hilary Putnam: Philosophy of Mathematics, Selected Readings, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1964.

Beth, Evert W.: The Foundations of Mathematics, Norty-Holland Publishing Co., N. Y., 1959; Paperback, Harper and Row, N. Y. 1966.

——: Mathematical Thought: An Introduction to the Philosophy of Mathematics, D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1965; Gordon and Breach, N. Y., 1965.

Bishop, Errett, et al.: "The Crisis in, Contemporary Mathematics," *Historia Mathematica*, 2(1975), 505—33.

Black, Max: The Nature of Mathematics, Harcourt, Brace, Jovanovich, N. Y., 1935; Routledge & Kegan Paul, London, 1933.

Blumenthal, L. M: "A Paradox, A Paradox, A Most Ingenicus Paradox," *A. M. M.*, 47(1940), 346—53。

Bochenski, I. M.: A History of Formal Logic, Chelsea Publishing Co., N. Y., reprint, 1970.

Bourbaki, Nicholas: "The Architecture of Mathematics," *A. M. M.*, 57 (1950), 221—32; also in F. Le Lionnais, Great Currents of Mathematical Thought, Dover Publications, Inc. N. Y., 23--36.

Brouwer, L. E. J: "Intuitionism and Formalism." *American Mathematical Society Bulletin*, 20(1913—14), 81—96.

Burington, A. S.: "On the Nature of Applied Mathematics." A. M. M., 56 (1949), 221—41.

Calder, Allan: "Constructive Mathematics," *Scientific American* (Oct. 1979), 146—71.

Cantor, Georg: Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, Dover Publications, Inc. N. Y., 1955.

Cohen, Morris R.: A Preface to Logic, Holt, Rinehart and Winston, N. Y., 1944; Dover reprint, N. Y., 1977.

Cohen, Paul J. and Reuben Hersh: "Non-Cantorian Set Theory," *Scientific American* (Dec. 1967), 104—16.

Courant, Richard: "Mathematics in the Modern World," *Scientific American* (Sept. 1964), 40—49.

Dauben, J. W: Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite, Harvard University Press, Cambridge, 1978.

Davis, M. and R. Hersh: "Nonstandard Analysis." *Scientific American* (June 1972), 78—86.

Davis, P. J: "Fidelity in Mathematical Discourse: Is One and One Really Two?" *A. M. M.*, 79(1972), 252—63.

De Long, Howard: A Profile of Mathematical Logic, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1970.

——: "Unsolved Problems in Arithmetic," *Scientific American* (March 1971), 50—60.

Desua ,Frank: "Consistency and Completeness—A Résumé," *A. M. M.*, 63 (1956), 293—305.

Dieudonné, Jean: "Modern Axiomatic Methods and the Foundations of Mathemaitics," in Le Lionnais: Great Currents of Mathematical Thought, Vol. I, Dover Publications, N. Y., 1971, 251—66.

—— : "The Work of Nicholas Bourbaki," *A. M. M.*, 77(1970), 134—45.

Dresden, Arnold: "Brouwer's Contributions to the Foundations of Mathematics," *American Mathematical Society Bulletin*, 30(1924), 31—40.

—— : "Some Philosophical Aspects of Mathematics," *American Mathematical Society Bulletin*, 34(1928), 438—52.

Eves, Howard and Carroll V. Newsom: An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics, rev. ed., Holt, Rinehart and Winston, N. Y., 1965.

Fraenkel, Abraham A.: "On the Crisis of the Principle of the Excluded Middle," *Scripta Mathematica*, 17(1951), 5—16.

—— : "The Recent Controversies About the Foundations of Mathematics," *Scripta Mathematica*, 13(1947), 17—36.

—— , Y. Bar-Hillel, and A. Levy: Foundations of Set Theory, 2nd rev. ed., North-Holland Publishing co., N. Y., 1973.

Gödel , K.: "What is Cantor's Continuum Problem?" *A. M. M.*, 54(1947), 515—25; also in P. Benacerraf and H. Putnam, With additions, 258—73.

Goodman, Nicolas D.: "Mathematics as an Objective Science," *A. M. M.*, 86 (1979), 540—51.

Goodstein, R. L.: Essays in the Philosophy of Mathematics, Leicester University Press, 1965.

Hahn, Hans: "The Crisis in Intuition." In J. R. Newman, *The World of Mathematics*, vol. III, 1956—76.

Halmos, Paul R.: "The Basic Concepts of Algebraic Logic," *A. M. M.*, 63 (1956), 363—87.

Hardy ,G. H.: "Mathematical Proof," *Mind*, 38(1928), 1—25; also in *Collected Papers*, vol. VII, 581—606.

—— : A Mathematician's Apology, Cambridge University Press, 1941.

Heijenoort, Jean van, ed.: From Frege to Gödel, A Source Book in Mathe-

matical Logic,1879—1931,Harvard University Press,Cambridge. 1967.

Hempel,Carl G.:"Geometry and Empirical Science,"*A. M. M.* 52(1945),7—17.

——:"On the Nature of Mathematical Truth,"*A. M. M.*,52(1945),543—56;also in P. Benacerraf and H. Putnam.

Hersh,Reuben:"Some Proposals For Reviving the Philosophy of Mathematics,"*Advances in Mathematics*,31(1979),31—50.

Hilbert,David:"On the Infinite,"*Mathematische Annalen*,95(1925),161—90;also in P. Benacerraf and H. Putnam,134—51 and in J. Van Heijenoort,367—92.

Kline,Morris:Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,Oxford University Press,N. Y.,1972.

——:Mathematics in Western Culture,Oxford University Press,N. Y.,1953.

Kneale,William and Martha Kneale:The Development of Logic,Oxford University Press,N. Y.,1962.

Kneebone,G. T.:Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics,D. Van Nostrand,N. Y.,1963.

Körner,S.:The Philosophy of Mathematics,Hutchinson University Library,London,1960.

Lakatos,Imre:Mathematics,Science and Epistemology,2 vols,Cambridge University Press,N. Y.,1978.

——,ed.:Problems in the Philosophy of Mathematics,vol. 1,North-Holland Publishing Co.,N. Y.,1972.

——:Proofs and Refutations,Cambridge University Press,N. Y.,1976.

Langer,Susanne K.:An Introduction to Symbolic Logic,2nd ed.,Dover Publications,N. Y.,1953.

Le Lionnais,F.,ed.:Great Currents of Mathematical Thought,2 vols.,Dover Publications,N. Y.,1971.

Lewis,C. I.:A Survey of Symbolic Logic,Dover Publications,N. Y.,1960.

Luchins,E. and A.:"Logicism,"*Scripta Mathematica*,27(1965),223—43.

Luxemburg,W. A. J:"What is Non-Standard Analysis?" *A. M. M.*,80(1973),part II,38—67.

Mackie ,G. L. :Truth,Probability and Paradox,Oxford university Press,N. Y. ,1973.

Mendelson, Elliott: Introduction to Mathematical Logic, 2nd ed. , D. Van Nostrand,N.Y. ,1979.

Monk,J. D:"On the Foundations of Set Theory,"*A. M. M.* ,77(1970),703—11.

Myhill,Johe:"What is a Real Number?"*A. M. M.* ,79(1972),748—54.

Nagel,Ernest and J.R. Newman:"Gödel's Proof,"*Scientific American* (June 1956),71—86.

—— and —— ;Gödel's Proof,New York University Press,N.Y. ,1958.

Neumann, John von: "The Mathematician," in Robert B. Heywood, The Works of the Mind,University of Chicago Press,Chicago(1947),180—96;also in J. R. Newman:*The World of Mathematics*, vol. IV(1956), 2053—68;also in *Collected Works*,vol. I(1961),1—9.

Newman,James R:The World of Mathematics,4 vols,Simon and Schuster, N.Y. ,1956.

Pierpont,James:"Mathematical Rigor Past and Present,"*American Mathematical Society Bulletin*,34(1928),23—52.

Poincaré,Henri:The Foundations of Science,The Science Press,Lancaster, Pa. ,1946.

—— ;Last Thoughts,Dover Publications,N.Y. ,1963.

Putnam,Hilary:"Is Logic Empirical?"*Boston Studies in Philosophy of Science*,5(1969),216—41.

—— ; Mathematics,Matter and Method,Philosophical Papers,vol. I,Cambridge University Press,N.Y. ,1975.

Quine , W. V. : "The Foundations of Mathematics," *Scientific American* (Sept,1964),112—27.

—— ; From a Logical Point of View, 2nd ed. ,Harvard University Press, Cambridge,1961.

—— ;"Paradox,"*Scientific American* (April 1962),84—96.

—— ;The Ways of Paradox and Other Essays,Random House,N.Y. ,1966.

Richmond,D. E: "The Theory of the Cheshire Cat,"*A. M. M.* 41(1934), 361—68.

Robinson, Abraham: Non-Standard Analysis, 2nd ed., North-Holland Publishing Co., N. Y., 1974.

Rotman, B. and G. T. Kneebone: The Theory of Sets and Transfinite Numbers, Oldbourne Book Co., London, 1966.

Russell, Bertrand: The Autobiography of Bertrand Russell: 1872 to World War I, Bantam Books, N. Y., 1965.

——: Introduction to Mathematical Philosophy, George Allen & Unwin, London, 1919.

——: Mysticism and Logic, Longmans, Green, London, 1925.

——: The Principlse of Mathematics, 2nd ed., George Allen & Unwin, London, 1937.

Schrödinger, Erwin: Nature and the Greeks, Cambridge University Press, N. Y., 1954.

Sentilles, D.: A Bridge to Advanced Mathematics, Williams & Wilkins, Baltimore, 1975.

Snapper, Ernst: "What is Mathematics?" *A. M. M.*, 86(1979), 551—57.

Stone, Marshall: "The Revolution im Mathematics," *A. M. M.*, 68(1961), 715—34.

Tarski, Alfred: Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences, 2nd ed., Oxford University Press, N. Y., 1946.

——: "Truth and Proof," *Scientific American* (June 1969), 63—77.

Waismann, F.: Introduction to Mathematical Thinking, Harper & Row, N. Y., 1959.

Wavre, Robin: "Is There a Crisis in Mathematics?" *A. M. M.*, 41(1934), 488—99.

Weil, André: "The Future of Mathematics," *A. M. M.*, 57(1950), 295—306.

Weyl, Hermann: "A Half-Century of Mathematics," *A. M. M.*, 58(1951), 523—53.

——: "Mathematics and Logic," *A. M. M.*, 53(1946), 2—13.

——: Philosophy of Mathematics and Natural Science, Princeton University Press, Princeton, 1949.

White, Leslie A.: "The Locus of Mathematical Reality: An Anthropological Footnote," *Philosophy of Science*, 14(1947), 289—303; also in James R.

Newman(above); vol. IV, 2348—64.

Whitehead, Alfred North and Bertrand Russell: Principia Mathematica, 3 vols., Cambridge University Press, N. Y., lst ed., 1910—13; 2nd ed., 1925—27.

Wigner, Eugene P.: "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(1960), 1—11.

Wilder, Raymond L.: Introduction to the Foundations of Mathematics, 2nd ed. John Wiley, N. Y., 1965.

——: "The Nature of Mathematical Proof," *A. M. M.*, 51(1944), 309—23.

——: "The Role of the Axiomatic Method," *A. M. M.*, 74(1967), 115—27.

——: "The Role of Intuition," *Science*, 156(1967), 605—10.